

Jelöljük az A , B , C csúcsok közös szomszédját O -val. Az $OABC$ tetraéder térfogata $\frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1000}{6} < \frac{251}{125}$ · 1000, ezért az $\mathcal{S}_1$ sík O -tól távolabb van, mint az ABC sík. Messe az $\mathcal{S}_1$ az O -ból induló kockaéleket rendre az A_1 , B_1 , C_1 pontokban. Az $OA_1B_1C_1$ tetraéder O -ból induló élei egyenlő hosszúak. Legyen $AA_1 = BB_1 = CC_1 = x$. Ekkor az $\mathcal{S}_1$ által a kockából levágott rész térfogatát – azaz az $OA_1B_1C_1$ tetraéder és a kocka közös részének térfogatát – megkapjuk, ha az $OA_1B_1C_1$ tetraéder térfogatából levonjuk az A , B és C csúcsoknál a kocka lapjai által a nagy tetraéderből levágott három kis tetraéder térfogatát (1. ábra). E kis tetraéderek A -ban, B -ben, illetve C -ben találkozó élei páronként merőlegesek egymásra, hosszuk pedig $x - 10$, ezért az $\mathcal{S}_1$ által a kockából levágott rész térfogata:

$$\frac{1}{6}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{6}(x - 10)^3.$$

A feltétel szerint ez a kocka térfogatának $\frac{251}{750}$ része, tehát

$$\frac{1}{6}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (x - 10)^3 = \frac{251}{750} \cdot 1000.$$

Ezt az egyenletet rendezve kapjuk, hogy

$$x^3 - 45x^2 + 450x - 496 = 0.$$

A harmadfokú egyenleteknek is van – a másodfokúakhoz hasonlóan – általános megoldóképlete. Ezt az egyenletet azonban annak ismerete nélkül is megoldhatjuk. Ha az egyenletnek van egész gyöke, akkor az osztja a 496-ot, az egyenlet konstans tagját. $496 = 2^4 \cdot 31$, az osztókat megvizsgálva kapjuk, hogy $x = 31$ gyöke az egyenletnek. Ezután az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$x^3 - 45x^2 + 450x - 496 = (x - 31)(x^2 - 14x + 16).$$

Tehát az egyenlet gyökei: $x_1 = 31$, $x_{2,3} = 7 \pm \sqrt{33}$.

Mivel az $\mathcal{S}_1$ sík O -tól távolabb van, mint az ABC sík, de közelebb van O -hoz, mint a kocka O -val átellenes csúcsához, azért $10 < x < \frac{10\sqrt{3}}{2}$. Ezeknek a feltételeknek csak az $x = 7 + \sqrt{33}$ megoldás felel meg. A kocka középpontos szimmetriája miatt az $\mathcal{S}_2$ sík is ugyanakkora szakaszokat vág le a kocka O -val átellenes csúcsából kiinduló élekből. A két sík távolságát megkapjuk, ha a kocka testátlójának hosszából levonjuk az $OA_1B_1C_1$ tetraéder O -hoz tartozó magasságának kétszeresét.

Az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldala $x \cdot \sqrt{2}$, ezért a háromszög területe $\frac{x^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Ha az O -hoz tartozó magasságot m -mel jelöljük, akkor a tetraéder térfogatát kétféleképpen felírva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \cdot 2\sqrt{3}}{4} \cdot m = \frac{1}{6} \cdot x^3,$$

$$\text{tehát } m = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} + \sqrt{11}.$$

Vagyis az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkok távolsága

$$10\sqrt{3} - 2m = \frac{16\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{11} \approx 2,6044 \text{ egység.}$$

Horváth Illés (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján



