

Megmutatjuk, hogy ha P nincs rajta a két kör egyik közös érintőjén sem, akkor a két kör által az EF egyenesből kimetszett szakaszok aránya megegyezik a PE/PF arány egy konstansszorosával. Ez az arány valóban nem függ attól, hogy melyik érintőt rajzoltuk meg, mert egy külső pontból egy körhöz húzott két érintő hossza egyenlő.

Jelöljük az e , illetve f körök középpontját O_e , illetve O_f -fel; az EF egyenesből a körök által kimetszett szakaszok felezőpontját pedig H_e , illetve H_f -fel. Tudjuk, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, valamint azt is, hogy a két húr felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján. Ezért az EO_eH_e és a PEF , illetve az FO_fH_f és a PFE szögpárok merőleges szárúak. Ezek a szögek tehát egyenlők vagy 180° -ra egészítik ki egymást (1.a és b) ábra). Mindkét esetben igaz, hogy

$$\sin \angle EO_eH_e = \sin \angle PEF \quad \text{és} \quad \sin \angle FO_fH_f = \sin \angle PFE.$$

Ha az e kör sugara r_e , az f köré pedig r_f , akkor $EH_e = r_e \sin \angle EO_eH_e$ és $FH_f = r_f \sin \angle FO_fH_f$. A PEF háromszögben a szinusztétel szerint $\frac{PE}{PF} = \frac{\sin \angle PFE}{\sin \angle PEF}$, tehát a két kör által az EF egyenesből kimetszett szakaszok aránya:

$$\frac{2 \cdot FH_f}{2 \cdot EH_e} = \frac{r_f \cdot \sin \angle FO_fH_f}{r_e \cdot \sin \angle EO_eH_e} = \frac{r_f}{r_e} \cdot \frac{\sin \angle PFE}{\sin \angle PEF} = \frac{r_f}{r_e} \cdot \frac{PE}{PF}.$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

Ha az e és f köröknek van közös érintője, és P rajta van ezek egyikén, akkor az állítás nem igaz. A 2. ábrán látható, hogy ebben az esetben van olyan helyzete az EF egyenesnek, amelyből a két kör nem metsz ki húrokat, s olyan is, amelyből kimetsz.

