

Legyen a feltételnek megfelelő tetraéder $DEGH$. Legyen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 és F_6 rendre a DH, DE, EG, GH, EH és DG élek felezőpontja. Az E csúcsban találkozó élek $5, \sqrt{34}$ és $\sqrt{41}$ hosszúak, legyen pl. $ED = 5, EH = \sqrt{41}$ és $EG = \sqrt{34}$. Ha $DG = 5$ lenne, akkor a D csúcsból két darab 5 hosszúságú él lépne ki, és hasonlóan, ha $DG = \sqrt{34}$ lenne, akkor a G csúcsban találkozó élek közül lenne kettő $\sqrt{34}$; így $DG = \sqrt{41}$, és $DE = 5$ és $DG = \sqrt{41}$, miatt $DH = \sqrt{34}$. Mivel $GE = \sqrt{34}$ és $GD = \sqrt{41}$, ezért $GH = 5$.

Felhasználjuk, hogy egy tetszőleges háromszögben $s_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$, ahol a háromszög oldalai a, b és c , az a -hoz tartozó súlyvonal pedig s_a . (Ez az állítás lényegében a *Geometriai feladatok gyűjteménye* II. 289. feladatának következménye.)

$$F_1E \text{ a } DEH \text{ háromszög súlyvonala, így } F_1E^2 = \frac{2DE^2 + 2HE^2 - DH^2}{4} = 24, 5.$$

$$F_1G \text{ a } DGH \text{ háromszög súlyvonala, így } F_1G^2 = \frac{2DG^2 + 2GH^2 - DH^2}{4} = 24, 5.$$

$$F_1F_3 \text{ az } EF_1G \text{ háromszög súlyvonala, így } F_1F_3^2 = \frac{2F_1E^2 + 2F_1G^2 - EG^2}{4} = 16, \text{ ezért } F_1F_3 = 4.$$

Hasonlóan kapjuk a HEG háromszögben: $F_4E_2 = 31, 25$, a DGH háromszögben: $F_4D_2 = 31, 25$, a DF_4E háromszögben: $F_2F_4 = 5$, továbbá a DEH háromszögben: $F_5D_2 = 19, 25$, a HGE háromszögben: $F_5G_2 = 19, 25$, a DF_5G háromszögben $F_5F_6 = 3$.

A tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő szakaszok hossza rendre $3, 4$ és 5 ; mégpedig úgy, hogy a $\sqrt{41}$ hosszú élek felezőpontjait a 3 , a $\sqrt{34}$ hosszú élek felezőpontjait a 4 , az 5 hosszúságú élek felezőpontjait az 5 hosszú szakasz köti össze.

Szekeres Balázs (Szolnok, Verseghegy Ferenc Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. Megmutatható, hogy a feladatban szereplő tetraéder bennfoglaló paralelepipedonja téglatest. Ha a téglatest éleinek hossza a, b, c , akkor Pitagorasz tétele szerint: $a^2 + b^2 = 25, b^2 + c^2 = 41, c^2 + a^2 = 34$. Ebből az egyenletrendszerből: $a = 3, b = 4, c = 5$. Ezek az élhosszak most éppen megegyeznek a tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő szakaszok hosszával.