

Legyen  $AC = b$ ,  $CP = d$ ,  $\frac{1}{2}AB = e$ , ekkor  $BC = b + e$ , legyen továbbá  $PAC \sphericalangle = \alpha$  és  $CPA \sphericalangle = \beta$  (1. ábra). Be kell látnunk, hogy  $\alpha = 2\beta$ .

Mivel  $0^\circ < \alpha$ ,  $\beta < 180^\circ$  és a koszinuszfüggvény 0 és  $180^\circ$  között monoton csökkenő, így az eredetivel ekvivalens a  $\cos \alpha = \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1$  egyenlőség. Ezt fogjuk igazolni.

Írjuk fel a koszinusztételt az  $ABC$  háromszögben az  $\alpha$  szögre, majd az  $ACP$  háromszögben az  $\alpha$ , illetve  $\beta$  szögekre:

$$(b + e)^2 = b^2 + (2e^2) - 4be \cdot \cos \alpha \quad (1) \quad d^2 = b^2 + \left(\frac{3}{2}e\right)^2 - 3be \cdot \cos \alpha \quad (2) \quad b^2 = d^2 + \left(\frac{3}{2}e\right)^2 - 3de \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

Fejezzük ki (1)-ből  $\cos \alpha$ -t:  $\cos \alpha = \frac{3e - 2b}{4b}$ ; helyettesítsük be (2)-be:

$$d^2 = b^2 + \frac{9}{4}e^2 - 3e \frac{3e - 2b}{4} = b^2 + \frac{3}{2}be,$$

ezt helyettesítsük (3)-ba, és fejezzük ki  $\cos \beta$ -t:

$$\cos \beta = \frac{b^2 + \frac{3}{2}be + \frac{9}{4}e^2 - b^2}{3de} = \frac{2b + 3e}{4d}.$$

Lássuk be, hogy  $\cos \alpha = 2 \cos^2 \beta - 1$ , azaz

$$\frac{3e - 2b}{4b} = 2 \left( \frac{2b + 3e}{4d} \right)^2 - 1. \text{ Mindkét oldalhoz } 1 - \text{et hozzáadva: } \frac{3e + 2b}{4b} = 2 \frac{(2b + 3e)^2}{8d^2} = \frac{(2b + 3e)^2}{4(2b^2 + 3be)},$$

ami valóban azonosság.

Békly Bence (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

*Megjegyzések.* 1. A beküldők többsége hasonló módon, általában bonyolultabb számolással oldotta meg a feladatot. Azonban ha valaki szinusztételt használt, akkor önmagában nem volt elég a  $\sin \alpha = \sin 2\beta$  egyenlőséget belátni, hiszen a  $(0; \pi)$  intervallumon a szinuszfüggvény nem kölcsönösen egyértelmű.

2. Lényegesen egyszerűbb a megoldás, ha abból kiindulva, hogy  $BC = b + e$ , rajzolunk  $C$  körül egy  $b$  sugarú kört. Ha ez a kör az  $AB$ -t  $D$ -ben,  $CB$ -t pedig  $E$ -ben metszi, akkor a 2. ábra jelöléseivel  $CA = CD = CE = b$ ,  $BE = e$ .

Írjuk fel a  $B$  pontnak a körre vonatkozó hatványát kétféleképpen:

$$BE(BE + 2CE) = BD \cdot BA,$$

azaz

$$e(e + 2b) = BD \cdot 2e,$$

ahonnan  $BD = b + \frac{e}{2}$ .

Mivel  $PB = \frac{e}{2}$ , így  $DP = DB - PB = b$ , tehát a  $DPC$  háromszög egyenlő szárú,  $DCP \sphericalangle = \beta$ . E háromszög  $D$  csúcsánál  $CDA \sphericalangle = \alpha$  külső szög, így valóban  $\alpha = 2\beta$ .

