

Jelölje a szóban forgó összegek közül az elsőt $D_1(n)$, a másodikat pedig $D_2(n)$.

$D_1(n)$ meghatározásánál minden, az n -nél nem nagyobb pozitív páros számot annyiszor kell figyelembe vennünk, ahány többszöröse van az $1, 2, \dots, n$ számok között. Ezért $D_1(n) = \sum_{2j \leq n} s_n(2j)$, ahol $s_n(k)$ jelöli a k pozitív egész 1

és n közé eső többszöröseinek számát: $s_n(k) = \lfloor n/k \rfloor$. Hasonlóképpen $D_2(n) = \sum_{2j-1 \leq n} s_n(2j-1)$. Világos, hogy $k < l$

esetén $s_n(k) \geq s_n(l)$, így a $D_1(n)$ összeg minden egyes $s_n(2j)$ tagját felülről becsülhetjük a $D_2(n)$ összeg megfelelő $s_n(2j-1)$ tagjával. Következésképpen $D_1(n) \leq D_2(n)$. Hasonlóképpen, az első tag $s_n(1) = n$ kivételével, a $D_2(n)$ összeg minden egyes $s_n(2j-1)$ tagja ($j \geq 2$) megbecsülhető a $D_1(n)$ összeg megfelelő $s_n(2(j-1))$ tagjával, ezért $D_2(n) \leq n + D_1(n)$. A két egyenlőtlenség összevetéséből a feladat állítása azonnal leolvasható.

Megjegyzések. 1. A feladatot Pósa Lajos bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

2. A fenti bizonyítást finomíthatjuk olyan módon, hogy az egyes összegek első néhány tagjára alkalmazzuk az $s_n(k) = \lfloor n/k \rfloor$ képletet, és csak a fennmaradó tagokat becsüljük a másik összeg megfelelő tagjaival. Így a $D_1(n) \leq D_2(n)$ egyenlőtlenség helyett például $n \geq 2$ esetén az erősebb $D_1(n) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq D_2(n) - n$ becslést alkalmazhatjuk, ahonnan $\lceil n/2 \rceil \leq D_2(n) - D_1(n) \leq n$ következik. Általában tetszőleges k pozitív egész számra felírható $n \geq 2k + 1$ esetén a

$$\sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{n}{2j-1} \right\rfloor - \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{n}{2j} \right\rfloor \leq D_2(n) - D_1(n) \leq \sum_{j=1}^{k+1} \left\lfloor \frac{n}{2j-1} \right\rfloor - \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{n}{2j} \right\rfloor$$

egyenlőtlenség, amelyből kiindulva az $\ln(k+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} < 1 + \ln k$ becslésre támaszkodva nem nehéz megmutatni, hogy a $(D_2(n) - D_1(n))/n$ sorozat határértéke $\ln 2$.

Terpai Tamás dolgozatában azt is megmutatta, hogy a $D_2(n) - D_1(n)$ különbség $n \cdot \ln 2$ -től való eltérése $\sqrt{n}$ nagyságrendű. (Erre vonatkozóan lásd még az 1999. decemberi számunk A. 225. számú feladatát.)