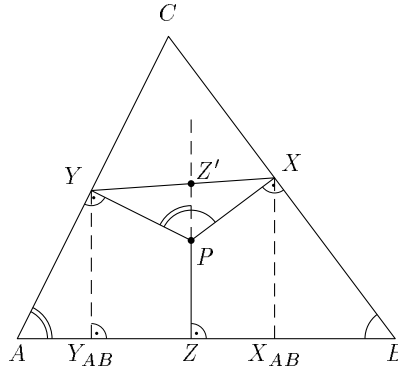


I. megoldás. A háromszög csúcsait jelölje A , B és C , a P pont vetületei a BC , CA , AB oldalakra pedig legyenek rendre X , Y és Z . P pontosan akkor súlypontja az XYZ háromszögnek, ha a PX , PY , PZ egyenesek rendre felezik az YZ , ZX , XY szakaszokat.

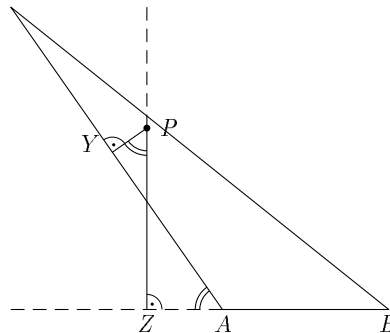
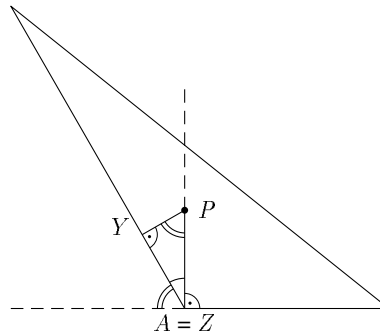
Vizsgáljuk meg, mit jelent az, hogy a PZ egyenes felezi az XY szakaszt. Ha a PZ és XY egyenesek metszéspontját Z' -vel, az X és Y pontok AB egyenesre eső vetületeit pedig X_{AB} -vel és Y_{AB} -vel jelöljük, úgy $YZ' = Z'X$ akkor és csak akkor teljesül, ha $Y_{AB}Z = ZX_{AB}$, vagyis ha $YP \cdot \sin(\angle YPZ') = XP \cdot \sin(\angle XPZ')$.



1. ábra

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy Z az AB szakasz belső pontja. Ekkor az 1. ábráról, az $AZPY$ és $BXPZ$ húrnégyszögeket figyelembe véve, leolvasható, hogy

$$\angle YPZ' = 180^\circ - \angle YPZ = \angle YAZ = \alpha, \text{ s } \angle XPZ' = 180^\circ - \angle XPZ = \angle XBZ = \beta.$$



2. ábra

A 2. ábra mutatja, hogy ez akkor is igaz, ha a Z pont esetleg egybeesik az AB szakasz valamelyik végpontjával, vagy azon kívül helyezkedik el.

A szinusztétel alapján tehát a PZ egyenes pontosan akkor felezi az XY szakaszt, ha

$$1 = \frac{YZ'}{Z'X} = \frac{YP \cdot \sin \alpha}{XP \cdot \sin \beta} = \frac{YP}{XP} : \frac{AC}{BC},$$

vagyis ha $\frac{YP}{XP} = \frac{AC}{BC}$. Azon P pontok, amelyekre ez az összefüggés teljesül, egy C -n áthaladó e_C egyenesre illeszkednek, amelyet megszerkeszthetünk úgy, hogy az AC és BC egyenesekkel, azoknak a háromszöget tartalmazó oldalán, azoktól AC , illetve BC távolságban párhuzamosokat húzunk, és ezek metszéspontját összekötjük a C ponttal.

Hasonlóképpen, a PX (PY) egyenes pontosan akkor felezi az YZ (XZ) szakaszt, ha $\frac{ZP}{YP} = \frac{AB}{AC}$ ($\frac{XP}{ZP} = \frac{BC}{AB}$). Világos, hogy a három feltétel közül bármely kettő teljesülése maga után vonja a harmadik teljesülését is.

Ha P az XYZ háromszög súlypontja, akkor szükségképpen illeszkedik az e_C egyenesre, és arra az e_A egyenesre is, amelyet úgy szerkeszthetünk meg, hogy az AB és AC egyenesekkel párhuzamosokat húzunk, azoknak a háromszöget tartalmazó oldalán, tőlük AB , illetve AC távolságban, és ezen párhuzamosok metszéspontját az A csúccsal összekötjük. Az e_A és e_C egyenesek az ABC háromszög belsejében metszik egymást. A keresett P pont nem lehet más, mint ez a metszéspont, és ez valóban jó is.

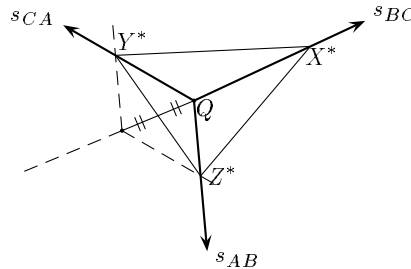
II. megoldás. (*Terpai Tamás* gondolata alapján.) Az előző megoldás jelöléseit megtartva megállapíthatjuk, hogy P pontosan akkor súlypontja az XYZ háromszögnek, ha $\vec{PX} + \vec{PY} + \vec{PZ} = \vec{0}$. Forgassuk el ezeket a vektorokat P körül az óramutató járásával ellentétes irányban 90° -kal. Az így nyert $\vec{PX}_1, \vec{PY}_1, \vec{PZ}_1$ vektorok rendre párhuzamosak és egyirányúak a háromszög $\vec{BC}, \vec{CA}$ és $\vec{AB}$ oldalvektoraival. Mivel az $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ vektorok közül semelyik kettő nem párhuzamos, továbbá $\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{0}$, a $\vec{PX}_1 + \vec{PY}_1 + \vec{PZ}_1 = \vec{0}$ összefüggés pontosan akkor áll fenn, ha van olyan λ pozitív szám, amelyre $\vec{PX}_1 = \lambda \cdot \vec{BC}$, $\vec{PY}_1 = \lambda \cdot \vec{CA}$ és $\vec{PZ}_1 = \lambda \cdot \vec{AB}$. A P pont tehát pontosan akkor súlypontja az XYZ háromszögnek, ha

$$\frac{PX}{BC} = \frac{PY}{CA} = \frac{PZ}{AB},$$

ahonnan a megoldás az előzővel megegyező módon fejezhető be.

III. megoldás. Az XYZ háromszöget fogjuk megszerkeszteni. Ezután P már igen egyszerűen megszerkeszthető az XYZ háromszög súlypontjaként, vagy az AB, BC egyenesekre az Z , illetve X pontban emelt merőlegesek metszéspontjaként. A szerkesztést két lépésben végezzük: először egy, a keresett háromszöghöz hasonló, azzal megegyező állású háromszöget szerkesztünk, majd alkalmas hasonlósági transzformációval azt a keresett XYZ háromszögbe visszük.

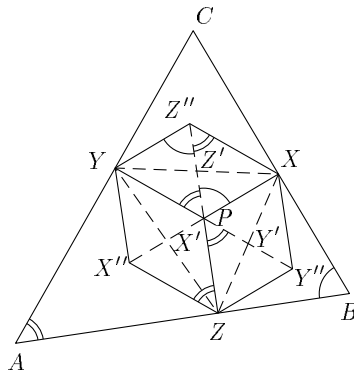
Vegyünk fel egy tetszőleges Q pontot a háromszög belsejében, és indítsunk a Q pontból az AB, BC, CA oldal-egyenesek irányába, azokra rendre merőleges s_{AB}, s_{BC}, s_{CA} félegyeneseket. Ezek rendre megegyező irányúak a $\vec{PZ}, \vec{PX}, \vec{PY}$ vektorokkal. Olyan $X^*Y^*Z^*$ háromszöget keresünk, amelynek súlypontja Q és amelyben a $\vec{QX^*}, \vec{QY^*}, \vec{QZ^*}$ vektorok rendre párhuzamosak a $\vec{PX}, \vec{PY}, \vec{PZ}$ vektorokkal. Ez csak úgy lehet, ha X^*, Y^*, Z^* rendre az s_{BC}, s_{CA}, s_{AB} félegyenésekre esnek. Tegyük fel, hogy X^* -ot már kijelöltük az s_{BC} félegyenesen.



3. ábra

Mivel tetszőleges háromszög súlyvonalai harmadolják egymást, nem nehéz megmutatni, hogy az Y^*, Z^* pontok úgy szerkeszthetők meg, hogy az X^* pontot Q -ra tükrözzük, majd a tükröképen keresztül az s_{AB}, s_{CA} félegyenésekre párhuzamosokat húzunk. Ezek metszik ki az s_{CA}, s_{AB} félegyenésekből az Y^*, Z^* pontokat. Világos, hogy bármely megoldás hasonló a keresett XYZ háromszöghöz, sőt azzal egyállású is. Válasszuk ki azt a megoldást, ahol X^* a BC egyenesre esik. Az ABC háromszög valamelyik oldalára két hegyesszög illeszkedik. Ha feltesszük, hogy a BC oldal ilyen, akkor X^* a BC szakasz belső pontja. Megmutatjuk, hogy pontosan egy olyan XYZ háromszög van, amely $X^*Y^*Z^*$ -gal egyállású és X, Y, Z csúcsai rendre a BC, CA, AB egyenesekre esnek. Van olyan X^* középpontú, pozitív arányú nagyítás, amely az $X^*Y^*Z^*$ háromszöget olyan $X^*Y^{**}Z^{**}$ háromszögbe viszi, ahol Y^{**} az AC szakaszra vagy pedig Z^{**} az AB szakaszra esik, és ez igen egyszerűen meg is található, ha megkeressük az X^*Y^* , illetve X^*Z^* félegyenéseknek az ABC háromszög területével alkotott metszéspontjait. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy Y^{**} az AB szakaszra esik. Ekkor az XYZ háromszöget meg kell kapnunk az $X^*Y^{**}Z^{**}$ háromszögből egy C középpontú, pozitív arányú nagyítással. Egyetlen ilyen nagyítás létezik: a Z pont megszerkeszthető mind a CZ^{**} félegyenes AB egyenessel alkotott metszéspontja. Világos, hogy a kapott XYZ háromszög megfelelő lesz.

IV. megoldás. (*Árva Eszter* ötlete.) Egy, az XYZ háromszöggel egyállású háromszög megszerkesztését a következő gondolatra támaszkodva is elvégezhetjük. Tegyük fel, hogy P az XYZ háromszög súlypontja, és tükrözzük P -t az XYZ háromszög oldalfelező pontjaira (4. ábra).



4. ábra

Az így keletkező $XZ''YX''ZY''$ hatszög felbontható 6 egybevágó háromszögre (XPZ'' , $Z''PY$, YPX'' , $X''PZ$, ZPY'' , $Y''PX$) amelyek hasonló az ABC háromszöghöz. Ugyanis, az előző megoldásban leírt módon látható, hogy például $\angle XZ''P = \angle Z''PY = \angle Z'PY = \angle CAB$. Az ABC háromszög 6 egybevágó példányát alkalmas módon egymáshoz illesztve tehát az $XZ''YX''ZY''$ hatszöggel egyállású hatszöget szerkeszthetünk. Innen a megoldás a III. megoldásával megegyező módon fejezhető be.

Megjegyzések. 1. *Harangi Viktor* észrevette, hogy a keresett P pont rajta van az ABC háromszög súlyvonalainak az azonos csúsból induló szögfelezőkre vonatkozó tükörképein, az ún. szimmediánsokon. Ezek egy pontban metszik egymást, amelyet a háromszög szimmediáns-pontjának nevezhetünk, ez tehát a szerkesztendő P pont. Ugyanezzel a ponttal találkozhatunk Lemoine- vagy Grebe-pont néven is.

2. Nem nehéz meggondolni (de némi diszkussziót igényel), hogy a háromszög határán vagy azon kívül soha nem létezik olyan pont, amely rendelkezne a kívánt tulajdonsággal.

3. *Terpai Tamás* azt is megvizsgálta, milyen esetben lesz P a vetületi pontok által alkotott háromszög valamely más nevezetes pontja (magasságpont, beírt kör középpontja, körülírt kör középpontja). Legnehezebb azonban kétségtelenül a feladatban kitűzött eset.