

I. megoldás. Legyen F a BC oldal felezőpontja, ekkor AF az ABC háromszög súlyvonala. Legyen $CAB \triangleleft = \varepsilon + \varphi$, ahol $CAF \triangleleft = \varepsilon$ és $FAB \triangleleft = \varphi$. Mivel a CAF és az FAB háromszögek területe egyenlő, igaz a következő:

$$t = \frac{AF \cdot AC \cdot \sin \varepsilon}{2} = \frac{AB \cdot AF \cdot \sin \varphi}{2},$$

$$AC = 1, \text{ tehát } AB = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}.$$

Esetünkben a súlyvonal a CAB szöget $1 : 2$ arányban osztja, így két eset lehetséges:

a) $\varphi = 2\varepsilon$ vagy b) $\varepsilon = 2\varphi$.

Az a) esetben $AB = \frac{\sin \varepsilon}{\sin 2\varepsilon} = \frac{\sin \varepsilon}{2 \cos \varepsilon \cdot \sin \varepsilon} = \frac{1}{2 \cos \varepsilon}$, és mivel $0^\circ < \varepsilon + \varphi < 180^\circ$, így $0^\circ < \varepsilon < 60^\circ$, tehát $\frac{1}{2} < AB < 1$.

A b) esetben $AB = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} = \frac{2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi} = 2 \cos \varphi$, és mivel most $0^\circ < \varphi < 60^\circ$, így $1 < AB < 2$.

Az AB oldal hossza tehát $\frac{1}{2}$ és 2 között lehet, de nem veheti fel az 1 értéket.

Raikovich Tamás (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. *Megjegyzés.* Ez a megoldás nem használ szögfüggvényeket, csak a háromszög-egyenlőtlenséget, ezért érdemes megismerni.

Tekintsük az ABC háromszög két csúcsát, A -t és C -t, valamint az A -nál levő $\alpha = 3\delta$ szögét adotttnak. Nevezzük e -nek az AB egyenesét: a háromszög B csúcsa pontja valahol ezen az egyenesen van. Mivel $\alpha < 180^\circ$, így $\delta < 60^\circ$. A 2. ábra jelölései szerint a háromszögnek vagy s_1 , vagy s_2 a súlyvonala. Tükrözzük C -t s_1 -re és s_2 -re, legyenek a tükröképek C_1 , illetve C_2 . Ekkor $AC = AC_1 = AC_2 = 1$, és C_1 nyilván rajta van s_2 -n. Húzzunk C_1 -en keresztül párhuzamost s_1 -gyel és C_2 -n keresztül párhuzamost s_2 -vel; ezek metszéspontjai e -vel B_1 , illetve B_2 . Azt állítjuk, hogy ha az ABC háromszög súlyvonala s_1 , akkor $B \equiv B_1$, ha pedig s_2 , akkor $B \equiv B_2$. Valóban, s_1 felezi a CB_1 , s_2 pedig a CB_2 szakaszt. B_1 vagy B_2 mindig egyértelműen adódik mint e és az s_1 -gyel, illetve s_2 -vel párhuzamos egyenesek egyetlen metszéspontja: s_1 , s_2 és e ugyanis nem párhuzamosak.

Mivel $B_1C_1 \parallel s_1$, így a $B_1C_1A \triangleleft = \delta$, tehát az AB_1C_1 háromszög egyenlő szárú; hasonlóan, az s_2 -re vonatkozó szimmetria miatt $C_2AB_2 \triangleleft = \delta$, és $B_2C_2 \parallel s_2$ miatt $C_2B_2A \triangleleft = \delta$, így az AC_2B_2 háromszög is egyenlő szárú.

Az AB_1C_1 háromszögben $AB_1 + B_1C_1 = 2AB_1 > AC_1 = 1$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, tehát $AB_1 > \frac{1}{2}$.

Mivel $AB_1C_1 \triangleleft = 180^\circ - 2\delta > 60^\circ$ ($\delta < 60^\circ$) és a nagyobb szög nagyobb oldallal szemben van, így $AB_1 < AC_1 = 1$.

Azt kaptuk, hogy $\frac{1}{2} < AB_1 < 1$.

Az AC_2B_2 háromszögben $AC_2 + C_2B_2 = 2 > AB_2$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, és $AC_2B_2 \triangleleft = 180^\circ - 2\delta > 60^\circ$, így mivel nagyobb oldallal szemben kell hogy legyen a nagyobb szög, $AB_2 > AC = 1$, tehát $1 < AB_2 < 2$.

Tehát az AB oldal hossza az egyik esetben $\frac{1}{2}$ és 1 , a második esetben 1 és 2 közé esik, és itt bármilyen értéket felvehet, hiszen minden ilyen értékhez megszerkeszthető vagy az AB_1C_1 , vagy az AC_2B_2 háromszög. (Vigyázat, $AB \neq 1$!)

Takács Gergő (Tatabánya, Árpád Gimn. és Pedagógiai Szki., 10. o.t.) dolgozata alapján



