

I. megoldás. a) A test egy l sugarú köríven leng (1. ábra), lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{ahol} \quad l = \frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{2}.$$

b) A test egy $2a = L$ nagytengelyű, $2b = 2l$ kistengelyű ellipszispályán mozog. Kis kitérések esetén mozgása olyan, mint egy R hosszúságú inga lengése, ha $R = a^2/b$ az ellipszishez a legalsó pontjához tartozó simuló kör sugara (2. ábra). Ennek megfelelően a lengésidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}, \quad \text{ahol} \quad R = \frac{(L/2)^2}{l} = \frac{(L/2)^2}{\sqrt{(L/2)^2 - (D/2)^2}}.$$

Lábó Melinda (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12.o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás Vizsgáljuk meg, mennyit nő az m tömegű gyöngyszem gravitációs helyzeti energiája, ha a gyöngyöt az egyensúlyi helyzetéből kicsiny x távolságra kimozdítjuk. Amennyiben ez a növekedés (közelítőleg)

$$E(x) \approx \frac{1}{2}Dx^2$$

alakba írható, akkor – egy rugó végén harmonikus rezgőmozgást végző testtel való formai analógia miatt – állíthatjuk, hogy a gyöngyszem mozgásának periódusideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

lesz.

a) A fonál síkjára merőleges irányban kitérítve a gyöngyöt, az egy $l = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - D^2}$ sugarú körív mentén mozog, függőleges irányban az emelkedése

$$l - \sqrt{l^2 - x^2} \approx l - l \left(1 - \frac{x^2}{2l^2}\right) = \frac{x^2}{2l},$$

a helyzeti energia változása tehát $\frac{1}{2}mgx^2/l$. Ezek szerint a „rugóállandó” $D = mg/l$, a periódusidő pedig

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{2g}}.$$

Kihasználtuk, hogy egy 1-hez közeli szám négyzetgyöke

$$(1) \quad \sqrt{1 + \varepsilon} \approx \sqrt{1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

b) A fonál síkjában kitérítve a gyöngyöt az egy ellipszispályán mozog, melynek egyenlete (lásd a 3. ábrát):

$$\frac{x^2}{(L/2)^2} + \frac{y^2}{(L/2)^2 - (D/2)^2} = 1,$$

azaz ismét az (1) közelítést alkalmazva:

$$y(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{(L^2 - D^2)} \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \approx -\frac{1}{2}\sqrt{L^2 - D^2} \left(1 - \frac{2x^2}{L^2}\right).$$

Látható, hogy a gyöngyszem energiaváltozása

$$E = mg[y(x) - y(0)] \approx mg \frac{\sqrt{(L^2 - D^2)}}{L^2} \cdot x^2,$$

a rugóállandó tehát

$$D = 2mg \frac{\sqrt{(L^2 - D^2)}}{L^2},$$

a rezgésidő pedig

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2}{2g\sqrt{L^2 - D^2}}}.$$

Hegedűs Ákos (Pécs, Ciszterci Nagy Lajos Gimn., 12 .o.t.)

