

A jobb oldalon egyszerűsítve és mindkét oldalból 1-et kivonva,

$$\frac{p^{2n+1} - 1}{p - 1} - 1 = (q^2 + q + 1) - 1p^{2n+1} - p = (p - 1)(q^2 + q)p(p^n - 1)(p^n + 1) = (p - 1)q(q + 1). (2)$$

A bal oldalon valamelyik tényező osztható a jobb oldalon szereplő q prímszámmal; ez a tényező legalább q . Mivel a legnagyobb tényező a $p^n + 1$, $p^n + 1 \geq q$ minden esetben teljesül. Ezt a becslést alkalmazzuk (2) jobb oldalán:

$$p(p^n - 1)(p^n + 1) \leq (p - 1)(p^n + 1)(p^n + 2)p \cdot (p^n - 1) \leq (p - 1)(p^n + 2)p^n + 2 \leq 3p. (3)$$

Ha p vagy n legalább 3, akkor $p^n = p^{n-1} \cdot p \geq 3p$, vagyis (3) nem teljesülhet. Tehát csak $p = n = 2$ lehetséges. Ezt behelyettesítve (2)-be $q(q + 1) = 30$, azaz $q = 5$.

A feladat egyetlen megoldása tehát $p = 2$, $q = 5$ és $n = 2$.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.) dolgozata alapján