

I. megoldás. Képzeljük el, hogy a felvételi rendszer reformja miatt azoknak a felvételizőknek, akik egynél több egyetemre jelentkeznek, egyetempárokat kellene megjelölniük az erre a célra rendszerezített „dupla jelentkezési íveken”. Aki persze nem akar továbbtanulni vagy pontosan tudja, mit akar, annak ilyesmivel nem kell vesződnie, de ha valaki például 4 egyetemre is jelentkezik, annak $\binom{4}{2} = 6$ dupla ívet kell kitöltenie.

Egy diáknak így 0, 0, 1, 3, 6, illetve 10 dupla ívre van szüksége aszerint, hogy 0, 1, 2, 3, 4 vagy pedig 5 egyetemre jelentkezik. Mindenképpen igaz tehát, hogy aki e helyre jelentkezik, az legalább $2e - 3$ dupla ívet tölt ki.

Ha az osztályba n diák jár, akik rendre $e_1, e_2, \dots, e_n$ egyetemre jelentkeznek, akkor a fentiek szerint összesen legalább $\sum_{i=1}^n 2e_i - 3 = 2 \sum_{i=1}^n e_i - 3n$ dupla ívet írnak meg.

Vizsgáljuk most a $\sum_{i=1}^n e_i$ összeget. Ez az összes jelentkezések száma, amit ha egyetemenként számolunk össze, akkor legalább $5 \frac{n}{2}$ -t kapunk, hiszen a feltétel szerint minden egyetemre legalább az osztály fele jelentkezett. A szükséges dupla ívek száma így legalább $2 \sum_{i=1}^n e_i - 3n \geq 2 \cdot 5 \frac{n}{2} - 3n = 2n$. Az összesen 10 egyetempárra így legalább $2n$ dupla ív érkezik, van tehát olyan egyetempár, ahová ennek legalább az egytizede, $\frac{n}{5}$, és ezt kellett bizonyítani.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Legyen az osztály létszáma n , és jelölje s_i azoknak a számát, akik pontosan i darab egyetemre jelentkeztek. Ha most T a továbbtanulni szándékozók, J pedig az egyetemi jelentkezések száma, akkor nyilván $T = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 \leq n$, másfelől $J = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + 5s_5$, ami a feltétel szerint legalább $5 \frac{n}{2}$. Az egyszerűség kedvéért jelölje k a k -adik egyetemet ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), az egyetemek egy tetszőleges H részhalmazára pedig e_H azon diákok számát, akik pontosan a H -beli egyetemekre jelentkeztek. Így azoknak a diákoknak a száma, akik jelentkeztek H -beli egyetemekre: $\sum_{H \subseteq G} e_G = E_H$. (A szóban forgó halmazok valamennyien az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz részhalmazai.)

Ekkor

$$E_{12} = e_{12} + (e_{123} + e_{124} + e_{125}) + (e_{1234} + e_{1235} + e_{1245}) + e_{12345},$$

ennyien jelentkeztek tehát az 1 és a 2 egyetemre. Még kilenc hasonló összeget írhatunk fel,

$$E_{13} = e_{13} + (e_{132} + e_{134} + e_{135}) + (e_{1324} + e_{1325} + e_{1345}) + e_{13245},$$

$$\vdots$$

$$E_{45} = e_{45} + (e_{451} + e_{452} + e_{453}) + (e_{4512} + e_{4513} + e_{4523}) + e_{45123}.$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy e tíz összeg között van olyan, amelyiknek az értéke legalább $\frac{n}{5}$, ez pedig következne abból, ha e tíz összeg E összege – amelyik szimmetrikus lévén könnyebben kezelhető – legalább ennek 10-szerese, azaz legalább $2n$. Vizsgáljuk tehát az E összeget.

Egy adott e_G tagot a G minden kételemű $\{i, j\}$ részhalmazához felírt E_{ij} összeg tartalmaz, mégpedig pontosan egyszer. Eszerint az E összegben pontosan $\binom{|G|}{2}$ alkalommal fordul elő az e_G tag. Így

$$E = \sum_{|G|=2}^5 \binom{|G|}{2} \cdot e_G = \sum_{|G|=2} e_G + 3 \sum_{|G|=3} e_G + 6 \sum_{|G|=4} e_G + 10 \sum_{|G|=5} e_G.$$

Másfelől a $\sum_{|G|=i} e_G$ összeg éppen azoknak a diákoknak a száma, akik pontosan i darab egyetemre jelentkeztek, korábbi jelölésünkkel s_i . Így az

$$E = s_2 + 3s_3 + 6s_4 + 10s_5$$

egyenlőséget kapjuk, erről az összegről kell megmutatnunk, hogy legalább $2n$. Rendelkezésünkre állnak a

$$T \leq n(1)saJ \geq \frac{5}{2}n(2)$$

feltételek, ebből kell bebizonyítanunk, hogy $E \geq 2n$. Tekintsük az (1) szerint nyilván teljesülő $\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}E \geq \frac{3}{2}T + \frac{1}{2}E$ egyenlőtlenséget. Ennek jobb oldala $1,5s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4,5s_4 + 6,5s_5$, ami nyilván nagyobb vagy egyenlő, mint $J = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + 5s_5$. Így (2) miatt $\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}E \geq J \geq \frac{5}{2}n$, ahonnan rendezés után valóban $E \geq 2n$ adódik. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Mindkét megoldásból kiderül, hogy a feladat állítása éles. Egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha valamennyi becslésben egyenlőség van, senki nem jelentkezik 0, 1, 4 vagy 5 egyetemre, és az osztály tanulóinak pontosan a fele jelentkezik minden egyes egyetemre.

2. Az s_i változók segítségével megfogalmazott feladat: *keressük az $s_2 + 3s_3 + 6s_4 + 10s_5$ összeg minimumát az $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 \leq n$ és az $s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 \geq \frac{5}{2}n$ feltételek mellett* mutatja, hogy a feladatnak ez a része az ún. *lineáris programozás* témakörébe tartozik.

3. Érdemes egybevetni a két megoldást. A másodikban a szerző szemmel láthatóan nem használta ki, hogy a feladat egy osztály tanulóiról szól, az n -nel való osztás után a megoldás szó szerint alkalmazható bármely halmazra és annak részhalmazaira, amennyiben a részhalmazokhoz mérőszámot – például területet – rendelünk. Ez a mérőszám a feladatban a halmazok elemszáma, az első megoldás kombinatorikai megközelítésében alapvető volt, hogy a szóban forgó halmazok végesek. A feladat állítása a második megoldás szerint nem csak ekkor igaz, tehát például a következő állítást is igazolta a szerző:

Egy egységnyi területű zsákon öt folt található, amelyek bármelyikének a területe legalább $\frac{1}{2}$. Mutassuk meg, hogy van a foltok között kettő, amelyek közös részének területe legalább $\frac{1}{5}$.

Ennek a feladatnak a megoldásáról és lehetséges általánosításairól szól I. M. Jaglomnak a *Kvant* című folyóiratban megjelent klasszikus cikke, amelynek fordítását számunk 10–20. oldalán közöljük.