

Az eredeti derékszögű háromszög nem lehet egyenlő szárú, mert akkor nem lehet súlyvonalaiából derékszögű háromszöget szerkeszteni: lenne két egyenlő hosszú súlyvonal, amelyek hosszabbak, mint a harmadik, de a leghosszabb oldalnak az átfogónak kell lennie. Ezért az eredeti háromszögben a derékszög mellett két különböző szög van. Legyen a két befogó hossza  $2a$  és  $2b$ , tegyük fel, hogy  $a > b$ . Ekkor  $\alpha > \beta$  (ábra). Mivel  $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 4(a^2 + b^2)$  és  $AF_2 = F_2B = CF_2$ , így  $CF_2^2 = a^2 + b^2$ . A  $BF_2F_3C$  trapézban  $BF_3 > CF_2$  ( $\beta < 90^\circ$ ), a  $CF_1F_2A$  trapézban  $AF_1 > CF_2$  ( $\alpha < 90^\circ$ ), az  $AF_3F_1B$  trapézban  $BF_3 > AF_1$  ( $\beta < \alpha$ ). Ezek alapján  $BF_3 > AF_1 > CF_2$ , vagyis a súlyvonalakból szerkesztett derékszögű háromszögben  $BF_3$  az átfogó. A súlyvonalakból szerkesztett háromszögre igaz a Pitagorasz-tétel:  $AF_1^2 + CF_2^2 = BF_3^2$ ; azaz  $((2b)^2 + a^2) + (a^2 + b^2) = ((2a)^2 + b^2)$ , vagyis  $a = \sqrt{2} \cdot b$ . Az eredeti háromszögben  $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \sqrt{2}$ .

A súlyvonalakból szerkesztett háromszögben:

$$\frac{AF_1}{CF_2} = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{4b^2 + 2b^2}}{\sqrt{2b^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{6b^2}{3b^2}} = \sqrt{2}.$$

Ha tehát a súlyvonalakból szerkesztett háromszög derékszögű, akkor az eredeti háromszög és az új háromszög befogóinak aránya is  $\sqrt{2}$ , és mivel a közbezárt szögek is egyenlőek ( $90^\circ$ -osak), azért a két háromszög hasonló.

Márton Sándor (Szeged, Radnóti M. Kisérl. Gimn., 9. o.t.)

