

Ismert, hogy ha egy ellipszis e érintőjén lévő E érintési pontot összekötjük az ellipszis F_1 és F_2 fókuszaival, akkor az így kapott vezérsugarak külső szögfelezője az e érintő (1. ábra). Ebből következik, hogy ha az F_2 fókuszt tükrözzük az ellipszis összes érintőjére, akkor a tükröképek halmaza az F_1 köré írt $2a$ sugarú kör lesz – $2a$ az ellipszis nagytengelyének hosszát jelöli –, mert ha F_2' az e -re vonatkozó tükrökép, akkor $F_2'F_1 = F_2'E + EF_1 = F_2E + F_1E = 2a$, hiszen a szögek egyenlősége miatt az F_2' , E és F_1 pontok egy egyenesen vannak, a tükrözés miatt pedig $F_2'E = F_2E$. (Ezeknek az állításoknak a részletes bizonyítása megtalálható pl. Hajós György: Bevezetés a geometriába című könyvének 42.1 és 42.2 tételénél.)

Jelöljük a feladatban szereplő két ellipszis közös fókuszát F_2 -vel, másik fókuszait F_1 -gyel, illetve F_3 -mal, nagytengelyeik hosszát pedig $2a_1$ -gyel, illetve $2a_3$ -mal. Az előzőek szerint, ha F_2 -t a két ellipszis egy közös érintőjére tükrözzük, akkor a kapott F_2' pont rajta lesz az F_1 körüli $2a_1$ sugarú és az F_3 körüli $2a_3$ sugarú körön is. Ha a két kör nem esik egybe (azaz ha a két ellipszis különböző), akkor legfeljebb két metszéspontjuk van, tehát a két ellipszisnek legfeljebb két közös érintője lehet. Ha P a két kör egy közös pontja, akkor a PF_2 szakasz felező merőlegese mindkét ellipszisnek érintője (2. ábra). Mivel két különböző kör közös pontjainak száma 0, 1 vagy 2, azért ha két ellipszisnek közös az egyik fókusza, de az ellipszisek különbözők, akkor közös érintőik száma 0, 1 vagy 2 lehet, s mindhárom eset elő is fordul (3. ábra).

Belső Róbert (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján



