

Elegendő a sorrendeknél csak arra tekintettel lenni, hol állnak lányok, hol fiúk, hiszen ha már ki vannak jelölve a „lányhelyek” és a „fiúhelyek”, akkor mindig ugyanannyiféleképpen tudjuk elrendezni a lányokat a lányhelyeken, és a lányok elhelyezésétől függetlenül ugyanannyiféleképpen a fiúkat a fiúhelyeken. A megoldásokban ezért csak a fiú–lány sorrendek számával foglalkozunk.

Nevezzük azokat a sorrendeket, amelyek nem vághatók a feladatokban leírt módon ketté,  $A$ -típusúnak, azokat, amelyeknek egy ilyen kettévágásuk van,  $B$ -típusúnak.

**I. megoldás.** Jelöljük az első helyen álló tanulót és a vele egyező neműeket  $X$ -szel, a másik nemű tanulókat  $Y$ -nal. Ha  $n$  lány és  $n$  fiú van az osztályban, akkor eszerint  $n$  darab  $X$ -nek és  $n$  darab  $Y$ -nak az  $X$ -szel kezdődő sorrendjeit kell vizsgálnunk. Minden ilyen sorrendhez a fiúknak és lányoknak két sorrendje tartozik, az egyik, amelyikben  $X$ -et fiúnak és  $Y$ -t lánynak értelmezzük, és a másik a fordított értelmezéssel keletkező.

Egy  $X$ -szel kezdődő  $A$ -típusú elrendezésben bármely betűig – az utolsó kivételével – legalább eggyel több  $X$  fordul elő, mint  $Y$ , hiszen a két betű előfordulásszáma közti különbség betűről betűre haladva eggyel változik, tehát ha  $X$ -szel kezdődik a sor, akkor az  $Y$ -ok csak úgy kerülhetnének túlsúlyba, ha előzőleg egyenlővé vált volna az  $X$ -ek és  $Y$ -ok száma. Ez azonban  $A$ -típusú elrendezésben csak az utolsó betűnél következhet be.

Egy  $B$ -típusú elrendezés a kettévágásnál két  $A$ -típusúra bomlik szét. Ezek közül az első  $X$ -szel kezdődik, a második azonban kezdődhet  $X$ -szel is,  $Y$ -nal is. Azok, amelyekben a második rész is  $X$ -szel kezdődik, a  $B$ -típusú elrendezések felét teszik ki, mert ezek második részében felcserélve az  $X$ -eket és  $Y$ -okat, minden sorrendet megkapunk és mindegyiket csak egyszer. A feladat állítását tehát bebizonyítjuk, ha az  $X$ -szel kezdődő  $A$ -típusú elrendezéseket egyértelműen összepárosítjuk az olyan  $B$ -típusúakkal, amelyeknek mindkét  $A$ -típusú része  $X$ -szel kezdődik.

Egy kívánt hozzárendelés történhet úgy, hogy a  $B$ -típusú elrendezés második  $A$ -típusú részének élén álló  $X$ -et a sor legelejére állítjuk.

Ezáltal  $A$ -típusú elrendezést kapunk, ugyanis a  $B$ -típusú elrendezés első  $A$ -típusú részében, mint láttuk, egy tetszőleges betűig, az utolsó kivételével, legalább eggyel több  $X$  van, mint  $Y$ . Az egész elé téve egy  $X$ -et, a második betűtől kezdve tehát legalább 2-vel több  $X$  lesz mint  $Y$ , egészen amíg az első  $A$ -típusú rész utolsó betűjéig nem érünk. Ez a betű a második  $A$ -típusú rész első betűje helyére került. Idáig eggyel több az  $X$ -ek száma, mint az  $Y$ -oké. A további betűket ugyanazok a betűk előzik meg, amelyek a  $B$ -típusú elrendezésben megelőzték, így megint több  $X$  lesz, mint  $Y$ , egészen az utolsó betűig.

A meg gondolásból azt is látjuk, hogy fordítva egy  $A$ -típusú sorrendben a második olyan betűt kell megkeresni, ameddig eggyel több  $X$  szerepel,<sup>1</sup> mint  $Y$ , és ez után helyezni a sor elejéről az első  $X$ -et. Ezáltal  $X$ -szel kezdődő sorrendet kapunk, mert ha az  $A$ -típusú elrendezésben az első  $X$ -et egy  $Y$  követné, akkor mindjárt az után ketté lehetne vágni a sorrendet, hiszen legalább négy betűből áll a sor. Az első  $X$  elvételével az  $X$ -ek és  $Y$ -ok számának a különbsége 1-gyel csökken, amíg el nem érjük az áthelyezett betű új helyét. Mivel az előtt 1 volt ez a különbség, most 0-ra csökken, mégpedig itt először. Itt tehát kettévágható a sorrend, előbb azonban nem. Tovább megint az  $X$ -ek lesznek túlsúlyban, míg a sor végére nem érünk, hiszen az  $X$  új helyén túl minden betűig ugyanazok a betűk vannak a módosított sorrendben is, mint az eredetiben.

Ezzel a kívánt párosítást elvégeztük, s így a feladat állítását igazoltuk.

*Megjegyzések.* 1. Jelöljük a  $k$  fiú és  $k$  lány  $A$ -, ill.  $B$ -típusú sorrendjeinek számát  $a_k$ -val ( $k \geq 1$ ), ill.  $b_k$ -val ( $k \geq 2$ ). Egy  $B$ -típusú elrendezést csak páros számú betű után lehet kettévágni. Az olyan elrendezések száma, amelyben ez a  $2k$ -adik betű után történik ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ )  $(a_k/2) \cdot a_{n-k}$ , mert egy  $2k$  betűből álló,  $X$ -szel kezdődő  $A$ -típusú elrendezést követ egy tetszőleges szerinti,  $2n-2k$  betűből álló. Így

$$\frac{b_n}{2} = \frac{a_1}{2} \cdot a_{n-1} + \frac{a_2}{2} \cdot a_{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} \cdot a_1.$$

A feladatot tehát megoldjuk, ha megmutatjuk, hogy  $a_n$  is felírható a jobb oldal formájában, vagy 2-vel osztva és  $a_k/2$ -t  $a'_k$ -vel jelölve

$$(1) \quad a'_n = a'_1 \cdot a'_{n-1} + a'_2 \cdot a'_{n-2} + \dots + a'_{n-1} \cdot a'_1.$$

2. Tuza Zsolt, dolgozatában a következő probléma közvetítésével látja be (1) fennállását:

„Hányféleképpen lehet egy kör (v. bármely konvex zárt vonal) mentén elhelyezett  $2k$  pontot úgy összepárosítani, hogy a párokat összekötő húroknak ne legyen közös pontja?”

Megmutatja egyfelől, hogy a megfelelő összekötések száma  $a'_{k+1}$ . Az összekötő húrok kisebb indexű végpontjához  $X$ -et, a nagyobb indexűhöz  $Y$ -t ír, majd sorra leírja az egymás utáni pontok mellé írt betűket és az elejére ír még egy  $X$ -et, a végére egy  $Y$ -t. Másfelől az első pontból induló átló két zárt vonalat képez a körből. Az egyikre és a másikra eső pontok külön-külön egymást nem metsző húrokkal vannak összekötve. (Megegyezőnk abban, hogy 0 pont összekötéseinek számán  $a'_1 = 1$ -et értünk.) Ez a gondolat elvezet az (1) összefüggés igazolásához. A részletek végig gondolását az olvasóra bízunk.

3. A fenti megszámlálási gondolat megfogalmazható az  $A$ -típusú elrendezések kettébontásaként az összekötési probléma közbeiktatása nélkül, ugyanis az első pontból induló húr végpontjának az a betű felel meg, amelynél másodszor

<sup>1</sup>Először mindjárt az első  $X$  után lesz ez a különbség 1.

csökken az addig előforduló  $X$ -ek és  $Y$ -ok számának különbsége 1-re. Így az  $A$ -típusú elrendezéseknek a fenti megoldásban szereplő átalakításához jutunk, csak ezt most nem a  $B$ -típusú elrendezésekhez való hozzárendelésre használjuk, hanem összeszámoljuk segítségével az  $A$ -típusú elrendezéseket is ugyanúgy, mint főtebb a  $B$ -típusúakat. A részletek végiggondolását ismét az olvasóra bízunk.

Ez a megfontolás azt mutatja, hogy az összekötési probléma szellemes közbeiktatása nélkülözhető, és tulajdonképpen a fenti megoldás egy variánsával állunk szemben.

4. Az (1) formula és az  $a'_1 = 1$  kezdő érték módját ad az  $a'_n$ , s így egyben az  $a_n$ , értékek egymás utáni kiszámítására, az  $a'_n$ , értékek úgynevezett rekurzív meghatározására. Többen egy másik rekurzív meghatározást találtak:

Az összes,  $n$  darab  $X$ -ből és  $n$  darab  $Y$ -ból álló sorozatok száma  $\binom{2n}{n}$ . Ezek közül a nem  $A$ -típusúak valamilyen  $k$ -ra a  $2k$ -adik betű után először (esetleg azután még más helyen is) kettévághatók úgy, hogy odáig  $k$  darab  $X$  és  $k$  darab  $Y$  legyen ( $1 \leq k \leq n-1$ ). A vágás előtti rész  $A$ -típusú, az ilyenek száma  $a_k$ , tovább a  $2n-2k$  elem  $\binom{2n-2k}{n-k}$  lehetséges elrendezésének bármelyike állhat. Ebből az

$$(2) \quad a_n = \binom{2n}{n} - a_1 \binom{2n-2}{n-1} - a_2 \binom{2n-4}{n-2} - \dots - a_{n-1} \binom{2}{1}$$

összefüggés adódik, ami az  $a_1 = 2$  kezdő értékkel szintén meghatározza az  $a_n$  értékeket. Kézenfekvő gondolat volna ezután (1)-et teljes indukcióval megpróbálni bizonyítani (2) felhasználásával, ez azonban nem vezet eredményre. Többen megtalálták vagy megsejtették  $a_n$ , meghatározását binomiális együtthatók segítségével. Még ennek ismeretében sem könnyű bizonyítani az (1) azonosság helyességét, a versenyzőknek nem is sikerült.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> A kérdést feladatnak kitűzni tervezzük. (Szerk.)