

I. megoldás. A bal oldal harmadik és negyedik tagja így alakítható át:

$$c(a-b)^2 + 4abc = c(a+b)^2.$$

Vonjuk le ezután a bal oldal egyes tagjaiból a jobb oldal megfelelő tagját, így a különbség szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} & a((b-c)^2 - a^2) + b((c-a)^2 - b^2) + c((a+b)^2 - c^2) = \\ & = a(b-c-a)(b-c+a) + b(c-a-b)(c-a+b) + c(a+b-c)(a+b+c) = \\ & = (a+b-c)(ab-ac-a^2-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2) = \\ & = (a+b-c)(-(a-b)^2+c^2) = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c). \end{aligned}$$

Itt mind a három tényező pozitív, mivel egy háromszög két oldalának az összege nagyobb a harmadiknál. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása így is fogalmazható: az egyenlőtlenség teljesülése szükséges feltétele annak, hogy a, b, c hosszúságú szakaszokból háromszöget lehessen szerkeszteni.

Könnnyen látható, hogy pozitív a, b, c számokra szorítkozva a feltétel elégséges is. Valóban, ha az egyenlőtlenség teljesül, akkor az átalakítással nyert szorzat pozitív, tehát vagy mind a három tényező pozitív, vagy kettő negatív, egy pozitív. Az első esetben létezik a, b, c oldalú háromszög. Ha viszont pl. az első két tényező negatív volna, akkor az összegük, $2a$ is, holott a pozitív. Ez tehát nem lehetséges.

2. Ha a háromszög egy szakaszt lefedő két szakasszá fajul el, akkor a két oldal egyenlővé válik.

II. megoldás. A két oldal különbsége tagokra bontás után így alakítható át:

$$(1) \quad a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) - 2abc.$$

Ez, a háromszög a, b, c -vel szemközti szögeit, mint szokás, α, β, γ -val jelölve, a cosinustétel alapján így alakítható tovább:

$$2abc(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1).$$

Itt, felhasználva, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, továbbá a könnyen igazolható

$$\begin{aligned} \cos \varphi + \cos \psi &= 2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}, \\ \cos \varphi - \cos \psi &= 2 \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}, \\ \cos \varphi &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

összefüggéseket¹

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \\ &= 2 \cos \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 1 = \\ &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right) + 1 = \\ &= 1 + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\ &= 1 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ez a kifejezés nagyobb, mint 1, mert $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$ hegyes szögek, s így sinusaik pozitívak. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Ha (1)-ben $-2abc$ helyett $-3abc$ -t írunk, a kifejezés már nem lesz pozitív. Ez volt az 1964. évi VI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2. feladata.² Az állítás tetszés szerinti pozitív a, b, c számokra helyes marad, sőt mindkét oldalhoz $2(a^3 + b^3 + c^3)$ -t adva a szimmetrikusabb

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc$$

alak általánosítható a következő módon: Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ nem-negatív számok, akkor

$$\begin{aligned} & (a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq \\ & \leq (n-1)(a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) + na_1 a_2 \dots a_n. \end{aligned}$$

Ez viszont az 1968. évi Schweitzer Miklós matematikai emléktverseny (egyetemi hallgatók versenye) 2. feladata volt.³

¹Lásd pl.: *Hack Frigyes*: Függvénytáblázatok – Matematikai összefüggések, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967. 75. old.

²Lásd a feladat megoldását K.M.L. **31** (1965), 24–25. old.

³Lásd Matematikai Lapok **20** (1969), 150–154. old.