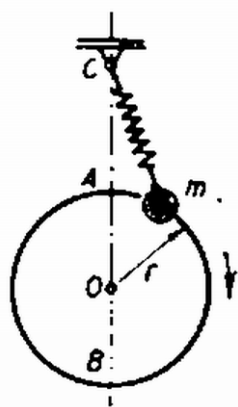


I. megoldás.



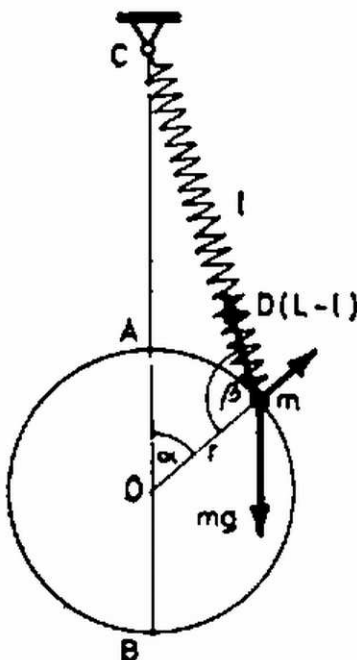
a) Ha az m tömegű test éppen a B pontig jut el, ez azt jelenti, hogy sebessége és így mozgási energiája az A és B pontokban egyaránt nulla, tehát a helyzeti energia és a rugó rugalmas energiájának összege a két pontban azonos:

$$(1) \quad (1/2)Dx_0^2 + mg \cdot 2r = (1/2)D(x_0 + 2r)^2,$$

ahol $x_0 = (k - 1)r - L$. Innen a szükséges tömeg:

$$(2) \quad m = (D/g)(kr - L) = 4,8 \text{ kg}.$$

b) A legnagyobb sebességet a test az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor veszi föl.



A testre az mg súlyerő, a rugóerő és egy sugárirányú kényszererő hat. Így a tömeg akkor lesz nyugalomban, ha a súlyerő és a rugóerő érintő irányú összetevője egyenlő:

$$(3) \quad D(l - L) \cos(\beta - 90^\circ) = mg \sin \alpha.$$

Itt l a rugó pillanatnyi hossza, a cosinustételből:

$$(4) \quad l = r\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \alpha} = ry$$

(bevezetve az y új változót, amit majd a II. megoldásban használunk fel). A rugó irányát jellemző β szög a sinustételből határozható meg

$$(5) \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{kr}{l}.$$

A (3)–(5) egyenletek felhasználásával a kifejezhető:

$$(6) \quad \alpha = \arccos \left[\frac{k^2 + 1}{2k} - \frac{kL^2 D^2}{2(kDr - mg)^2} \right].$$

m értékét (2)-ből behelyettesítve

$$\alpha = \arccos [1/(2k)] \approx 75,5^\circ.$$

Balogh László (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. A feladat b) része annak alapján is megoldható, hogy abban a pontban, ahol a test sebessége és mozgási energiája maximális, a helyzeti- és rugóenergia összege minimális. Egy tetszőleges helyzetben

$$(7) \quad E_h + E_r = (1/2)D(l - L)^2 + mgr \cos \alpha = \frac{1}{2}D(ry - L)^2 + mgr \frac{k^2 + 1 - y^2}{2k},$$

ahol l -et és $\cos \alpha$ -t (4)-ből y -nal fejeztük ki. Az energia szélsőértékeit deriváltjának nulla-helyei adják. Közvetett függvényként deriválva

$$(8) \quad \frac{d}{d\alpha}(E_h + E_r) = \frac{d}{dy}(E_h + E_r) \frac{dy}{d\alpha} = \left(Dr^2 y - DrL - \frac{mgr}{k} y \right) \frac{k \sin \alpha}{\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \alpha}}.$$

A $\sin \alpha = 0$ esetnek megfelelő $\alpha_1 = 0^\circ$ és $\alpha_2 = 180^\circ$ megoldások az A és B pontokat adják, ezekben a sebesség minimális. Ha a másik tényező nulla, az

$$(9) \quad y = \frac{DLk}{Drk - mg}$$

eredményre jutunk. (2)-t beírva $y = k$, α -ra az előző megoldás eredménye adódik.

Fodor Zoltán (Budapest, Radnóti M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Diszkutáljuk eredményünket m függvényében a többi paramétert változtatlatul hagyva!

Ha m nagyon nagy, a test nyilván körben mozog a pálya mentén, sebessége pedig B -ben a legnagyobb. Ez addig van így, amíg (9)-ből y -ra és onnan α -ra értelmes eredmény nem adódik, vagyis $\alpha = 180^\circ$, (4)-ből $y = 3$ nem lesz. (9)-ből ekkor $m = 5,87$ kg adódik. Ha $4,8 \text{ kg} < m < 5,87 \text{ kg}$, a tömeg körben mozog, de sebessége már egy közbülső α helyzetben a legnagyobb. A tömeget tovább csökkentve az m tömegű test ide-oda mozog egészen addig, amíg a maximális sebességű helyet jellemző α szög 0° -ká nem válik. Ekkor $y = 1$, $m = 1,6 \text{ kg}$. Ha $m < 1,6 \text{ kg}$, az A pont stabil egyensúlyi helyzet, mozgás nem jön létre.