

I. megoldás. A feladatot megoldjuk, ha megkeressük

I. azokat az a és b pozitív egész számokat, amelyekre $b < 99$, $\frac{a}{b} < \frac{19}{99}$ és $\frac{a}{b}$ az ilyen törtek közül a legnagyobb; illetve

II. azokat a c és d pozitív egész számokat, amelyekre $d < 99$, $\frac{c}{d} > \frac{19}{99}$ és $\frac{c}{d}$ az ilyen törtek közül a legkisebb.

I. Vizsgáljuk a $D = \frac{19}{99} - \frac{a}{b} = \frac{19b - 99a}{99b} > 0$ különbséget!

Legyen először $19b - 99a = 1$. Ekkor $19b = 99a + 1$, amiből $b = 5a + \frac{4a+1}{19}$.

Mivel $b < 99$, azért a kisebb, mint 20. Így a számláló, a $4a+1$ értéke 19 páratlan többszöröseként 19 vagy 57. A 19 nem megfelelő, mivel 18 nem osztható 4-gyel. Így $4a+1 = 57$, $a = 14$ és $b = 73$, a tört pedig $\frac{14}{73}$.

Ebben az esetben $D = \frac{1}{99 \cdot 73}$. Ez a legkisebb különbség, mivel ha D számlálója egynél nagyobb lenne, akkor a nevezőben csak 99-nél nagyobb b esetén lehetne a tört kevesebb, mint $\frac{1}{99 \cdot 73}$.

II. Vizsgáljuk most is a $D = \frac{c}{d} - \frac{19}{99} = \frac{99c - 19d}{99d} > 0$ különbséget!

Legyen először $99c - 19d = 1$. Ekkor $19d = 99c - 1$, amiből $d = 5c + \frac{4c-1}{19}$.

Mivel $d < 99$, azért c kisebb, mint 20. Így a számláló, $4c-1$ értéke 19; 57 vagy 95. 57 nem megfelelő, mivel 18 nem osztható 4-gyel. 95 esetén $c = 19$ és $d = 100$, túl nagy. Így $4c-1 = 19$, $c = 5$ és $d = 26$.

Ebben az esetben $D = \frac{1}{99 \cdot 26}$. Ha ennél kisebb különbséget keresünk, akkor ha D számlálója e , akkor d legalább $26e < 99$. Emiatt a D számlálója legfeljebb 3.

Ha $99c - 19d = 2$, akkor $19d = 99c - 2$, amiből $d = 5c + \frac{4c-2}{19}$. A fentiekhez hasonlóan ellenőrizhető, hogy csak a $4c-2 = 38$ a megoldás, amiből $c = 10$ és $d = 52$.

Ha $99c - 19d = 3$, akkor $19d = 99c - 3$, amiből $d = 5c + \frac{4c-3}{19}$. Most csak a $4c-3 = 57$ a megoldás, amiből $c = 15$ és $d = 78$.

Mindhárom eredmény az $\frac{5}{26}$ törtet adja.

A feladat megoldása tehát: $\frac{14}{73} < x < \frac{5}{26}$ az a legbővebb (nyílt) intervallum, ahol a $\frac{19}{99}$ a legkisebb nevezőjű tört.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha $0 < \frac{a}{b} < \frac{19}{99}$ és $19b - 99a = 1$, akkor az $\left(\frac{a}{b}; \frac{19}{99}\right)$ intervallumban minden tört nevezője nagyobb 99-nél – valójában, mint látni fogjuk majd, $99 + b$ -nél is.

Legyen tehát $0 < \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{19}{99}$. A nevezőkkel szorozva $99aq < bp \cdot 99 < 19bq$. Így $q = 19bq - 99aq = 19bq - 99bp + 99bp - 99aq = (19q - 99p)b + (bp - aq) \cdot 99 \geq b + 99$ (1. ábra).

$$\begin{array}{c} \overbrace{99aq \quad 99bp \quad 19bq}^{q = (19b - 99a)q} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{99k} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{bm} \quad \geq 99 + b \end{array}$$

1. ábra

Ugyanígy igazolható, hogy ha $\frac{19}{99} < \frac{c}{d}$ és $99c - 19d = 1$, akkor a $\left(\frac{19}{99}; \frac{c}{d}\right)$ intervallumban minden tört nevezője nagyobb, mint $99 + d$.

A megoldáshoz tehát meg kell keresnünk azt a legkisebb pozitív b , illetve d nevezőt, amelyre

$$19b - 99a = 1, \quad \text{illetve} \quad 99c - 19d = 1. (2)$$

Ismeretes, hogy – mivel $(19, 99) = 1$, a fenti egyenleteknek van, mégpedig pontosan egy olyan (b, a) , illetve (d, c) megoldása, hogy $0 < b < 99$ és $0 < a < 19$, illetve $0 < d < 99$ és $0 < c < 19$, sőt, a $19b - 99a = 99c - 19d$ egyenlőség átrendezésével kapott $19(d + b) = 99(a + c)$ feltételből ezekre a minimális megoldásokra $d + b = 99$ és $a + c = 19$.

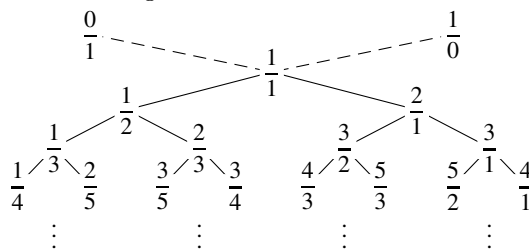
Az (1), (2) ún. diofantikus egyenletek megoldására több módszer ismeretes – az I. megoldásban valójában ezeket az egyenleteket oldotta meg a beküldő – és ezek bármelyikével $b = 73$, tehát $d = 99 - 73 = 26$, $a = 14$, tehát $c = 19 - 14 = 5$, a maximális intervallum pedig, amelyben $\frac{19}{99}$ a minimális nevezőjű tört, $\left(\frac{14}{73}, \frac{5}{26}\right)$.

Megjegyzések. 1. A megoldásból kiderül, hogy a keresett intervallumban $\frac{19}{99} = \frac{14+5}{73+26}$, a két végpont, $\frac{14}{73}$ és $\frac{5}{26}$ úgynevezett mediánja. A mediánképzés segítségével a $0 = \frac{0}{1}$ és az $1 = \frac{1}{1}$ törtekből kiindulva a $[0, 1]$ intervallum

bármely törtjéhez eljuthatunk, ezeket redukált – azaz egyszerűsített – alakban kapjuk, és minden $\frac{p}{q}$ tört a legbővebb olyan intervallum két végpontjának a mediánjaként áll elő, amelyben $\frac{p}{q}$ a minimális nevezőjű tört.

A konstrukció leírása megtalálható *Graham–Knuth–Patashnik: Konkrét matematika* (Műszaki Könyvkiadó, 1998) c. könyve 117–119. oldalán.

A fenti könyv 118. oldalán a konstrukciót megvalósító, ún. *Stern–Brocot*-fa kezdete látható (2. ábra).

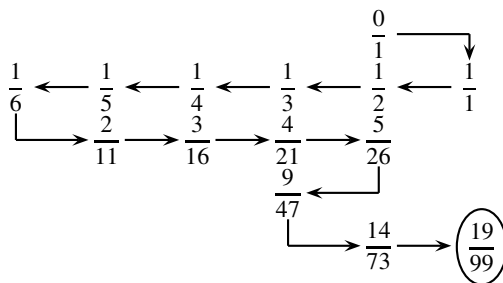


2. ábra

A fában az $\frac{1}{0}$ szimbólum segítségével az 1-nél nagyobb törtet is megkapjuk. Ha úgy tetszik – mint ahogyan a margón olvasható „graffiti” mondja, $\frac{1}{0}$ értelmezhető a „végtelennek nem redukálható tört alakjában történő előállításaként”. A fában minden tört az első balra, illetve jobbra felfelé útbajított szám mediánja.

A Stern–Brocot-fa felhasználásával oldotta meg a feladatot *Gerencsér Balázs* és *Kovács Erika Renáta* (mindketten a Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. osztályos tanulói). A hivatkozás után a feladat annyi, hogy a $\frac{19}{99}$ törtet kell megtalálni a fában. A két tört, amelynek mediánjaként megtaláltuk, határolja a keresett intervallumot.

Az alábbiakban Gerencsér Balázs ábrájának egy tipográfiailag módosított változatán mutatjuk be a $\frac{19}{99}$ felkutatását a fában. Induljunk el az egyik kezdőpontból, és mindig a $\frac{19}{99}$ felé lépünk tovább: ha az éppen érintett szám nagyobb, mint $\frac{19}{99}$, akkor balra, ha pedig kisebb, akkor jobbra lépünk a fában (3. ábra).



3. ábra

A $\frac{19}{99}$ a $\frac{14}{73}$ és az $\frac{5}{26}$ mediánjaként adódott, a keresett intervallum tehát $\left(\frac{14}{73}, \frac{5}{26}\right)$.

2. A redukált törtek fenti származtatásával áll szoros kapcsolatban a 0 és 1 közé eső törtek *Farey*-sorozatokba történő elrendezése. Erről olvashatunk többek között – a már idézett könyv 119–120. oldalán, továbbá a KöMaL 1999/1. és 2. számában megjelent *Holló-Szabó Ferenc: A Riemann-függvényről* című cikkében. N -edrendű Farey-sorozatnak nevezzük és $\mathcal{F}_N$ -nel jelöljük a 0 és 1 közötti olyan redukált törtek növekvően rendezett sorozatát, amelyek nevezője nem nagyobb, mint N . Például

$$\mathcal{F}_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

$\mathcal{F}_N$ -et megkapjuk, ha $\mathcal{F}_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ -ből indulva mindannyiszor beszúrjuk a mediánokat, valahányszor a nevező nem nagyobb, mint N .

$\mathcal{F}_N$ bármely két szomszédos $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ elemére $cb - ad = 1$, így a $\frac{19}{99}$ -hez tartozó maximális intervallum két végpontja $\frac{19}{99}$ két szomszédja lesz az $\mathcal{F}_{99}$ sorozatban. *Gáspár-Merse Előd* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) ezzel a módszerrel kereste meg a szóban forgó intervallumot.