

I. megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy $\frac{1}{16}$ és $\frac{1}{4}$ megoldásai az egyenletnek. Megmutatjuk, hogy más valós megoldás nincs.

Mindkét oldal természetes alapú logaritmusát véve az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk, hiszen x pozitív:

$$\sqrt{x} \ln x = -\ln 2.$$

Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ függvényt ($x > 0$). f differenciálható a pozitív számok halmazán, és a függvény deriváltja $f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$. Ha $0 < x < e^{-2}$, akkor $f'(x) < 0$; $f'(e^{-2}) = 0$, és ha $x > e^{-2}$, akkor $f'(x) > 0$. Eszerint f szigorúan monoton fogyó, ha $0 < x < e^{-2}$, és szigorúan monoton növekvő, ha $x > e^{-2}$.

Emiatt f egy adott értéket legfeljebb kétszer vehet föl, a talált megoldásokon kívül nincsen több; a feladatnak két megoldása van: $x_1 = \frac{1}{16}$ és $x_2 = \frac{1}{4}$.

Baharev Ali (Vác. Boronkay Gy. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A helyes megoldásokban igen változatos helyettesítésekkel egyszerűsítették a vizsgálandó függvényt. Néhány példa: az $y = \sqrt{x}$ helyettesítéssel az $y^y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenletet kapjuk; ha $x = 2^k$, akkor az egyenlet $k \cdot 2^{\frac{k}{2}} = -1$. Az alábbi megoldás meglepően egyszerű egyenletre jut.

II. megoldás. Ha $x > 0$, akkor pontosan egy $t \in \mathbf{R}$ van, amelyre $x = 2^{-2t}$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet a

$$(2^{-2t})^{2^{-t}} = \frac{1}{2}$$

alakot ölti.

Mindkét oldal 2-es alapú logaritmusára térve:

$$\begin{aligned} 2^{-t} \cdot \log_2 2^{-2t} &= -1, & \text{azaz} \\ -t \cdot 2^{-t+1} &= -1, & \text{vagyis} \\ t &= 2^{t-1}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló függvény konvex, egy egyenes tehát legfeljebb két pontban metszi a grafikonját (*ábra*). Ha $t = 1$ és $t = 2$, akkor megoldást kapunk; innen $x_1 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2^{-4} = \frac{1}{16}$.

Az egyenlet megoldásai tehát $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{16}$.

Hargita Gábor (Ócsa, Bolyai J. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. *Venter György* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) az $x = \frac{1}{2^{nA}}$ ($n \geq 0$ egész, $1 \leq A < 2$) helyettesítéssel oldja meg a feladatot. Először igazolja, hogy $n \leq 5$, majd esetszétválasztással találja meg a két megoldást.

