I. megoldás. Rendezzük át a bizonyítandó egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sin x}{(\cos x)^{1/3}} - x > 0.$$

Ha $x = 0$, akkor a bal oldal 0. Megmutatjuk, hogy a bal oldal a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban szigorúan monoton növő. Ez következik abból, ha a deriváltja *pozitív* a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ szakaszon.

A bal oldalt deriválva

$$\frac{(\cos x)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (\sin x)^2}{(\cos x)^{\frac{2}{3}}} - 1 = \frac{1 + 2\cos^2 x}{3(\cos x)^{\frac{4}{3}}} - 1.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget felhasználva a deriváltban lévő tört számlálójára:

$$\frac{1 + \cos^2 x + \cos^2 x}{3} > (1 \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x)^{\frac{1}{3}} = (\cos x)^{\frac{4}{3}}.$$

A derivált tehát pozitív a megadott intervallumon, és ez az, amit bizonyítani akartunk.

II. megoldás. Ismeretes, hogy $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, így $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 1$ is igaz. Legyen $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x$. Ekkor $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Ebből következik, hogy minden pozitív tagú, 0-hoz tartó (x_n) sorozatra $f(x_n) \to 0$. Ha $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, akkor az $x_n = \frac{x}{2^n}$ sorozatra is $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \to 0$.

Ha megmutatjuk, hogy ez az $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ sorozat monoton fogyó, akkor ebből következik, hogy $f(x) > 0$. Ellenkező esetben ugyanis egy negatív tagú monoton fogyó sorozat tartana nullához, ami nem lehetséges.

Azt, hogy az $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ sorozat monoton fogyó, az $f(2x) > f(x)$ formában igazoljuk.

Meg kell tehát mutatnunk, hogy ha $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 - \cos 2x > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x.$$

Felhasználva, hogy $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ és hogy $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, rendezés után kapjuk, hogy

$$-2\cos^2 x + \cos x + 1 > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \left(\frac{\sin x \cos x}{x}\right)^3 = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 (1 - \cos^3 x).$$

A bal oldal szorzattá alakítható, a jobb oldalon pedig $1 - \cos^3 x$ az ismert módon $(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$, tehát egyenlőtlenségünk a

$$(2\cos x + 1)(1 - \cos x) > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 (1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos x^2)$$

alakba írható. Ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor $1 - \cos x > 0$ és $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$. Így $(1 - \cos x)$-szel osztva $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 < 1$ felhasználásával elegendő annyit bizonyítani, hogy

$$2\cos x + 1 > 1 + \cos x + \cos^2 x, azaz \cos x > \cos^2 x,$$

ami nyilván teljesül, hiszen az adott intervallumon $0 < \cos x < 1$.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)

III. megoldás. Felhasználunk két azonosságot, amelyek részletes bizonyítása megtalálható például *Denkinger Géza:* Analízis (Tankönyvkiadó, Budapest, 1987) című könyvének 316. oldalán. Eszerint minden valós x-re

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, (1) illetve \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. (2)$$

Megmutatjuk, hogy

$$\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0$$

és

$$-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\dots=\sum_{n\geq 3}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}<0.$$

Mindkét egyenlőtlenség következik az

$$(*)\qquad \frac{x^m}{m!}>\sum_{n>m}\frac{x^n}{n!}$$

egyenlőtlenségből, amit a $0<x<2$, $m\geq 3$ feltevéssel igazolunk:

$$\frac{x^m}{m!}-\sum_{n>m}\frac{x^n}{n!}=\frac{x^m}{m!}\left(1-\sum_{n>m}\frac{x^{n-m}}{(m+1)(m+2)\dots n}\right)>\frac{x^m}{m!}\left(1-\sum_{n>m}\frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}}\right).$$

$\displaystyle\sum_{n>m}\frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}}$ pozitív tagú végtelen mértani sor, amelynek hányadosa, $\displaystyle\frac{x}{m+1}$ kisebb 1-nél. A sor konvergens, összege

$$S=\frac{\frac{x}{m+1}}{1-\frac{x}{m+1}}=\frac{x}{m+1-x}.$$

Ha $m\geq 3$, akkor

$$S\leq\frac{x}{4-x}<1,$$

hiszen $x<4-x$ teljesül, ha $x<2$.

Visszatérve az (1), (2) formulákra, a kapott egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sin x>x-\frac{x^3}{3!}\qquad\text{és}\qquad\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}.$$

Eszerint, ha $x>0$,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)^3\qquad\text{és}\qquad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}>\cos x.$$

A bizonyítandó állítás most már következik, ha belátjuk, hogy $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ esetén

$$\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)^3>1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}.$$

Kifejtve, a bal oldal:

$$1-\frac{x^2}{3!}\cdot 3+\frac{x^4}{(3!)^2}\cdot 3-\frac{x^6}{(3!)^3}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216},$$

így elég megmutatni, hogy

$$\frac{x^4}{24}>\frac{x^6}{216},$$

azaz $9>x^2$, ami pedig teljesül, ha $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Vizer Máté (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. Kiss Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozatában indukcióval igazolta, hogy

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{6\cdot 4^n}{2\cdot 4^n+1}}>\cos x,$$

ha $n\geq -1$ egész. Ebből a bizonyítandó állítást $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot 4^n}{2\cdot 4^n+1}=3$ felhasználásával kapta meg. *Ivaskó György* (Baja, III. Béla Gimn., 12. o.t.) igazolta, hogy ha a kitevőben 3-nál nagyobb szám áll, akkor az egyenlőtlenség már nem teljesül a $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallum minden pontjára.