

I. megoldás. Akkor nincsen fennakadás, ha bármennyig tekintjük is a sort, legalább annyian várakoznak 100 forinttal, mint 200 forinttal.

Jelöljük az előbbieket s , utóbbiakat pedig k betűvel, és számoljuk meg, hány olyan permutációja van a négy s és négy k betűnek, amikor nincsen fennakadás. Egy ilyen jó sorrendben az elsőnek érkező százassal, az utolsó pedig 200 forinttal kell fizessen, ezért egy tetszőleges jó sorrend $s _ _ _ _ k$ alakú.

Csoportosítsuk a jó sorrendeket aszerint, hogy hányadik helyen áll az első néző, aki 200 forinttal akar fizetni. Ha ez K , akkor $2 \leq K \leq 5$.

(i) $K = 5$. Egyetlen ilyen sorrend van: $s s s s k k k k$, és ez nyilván jó.

(ii) $K = 4$: $s s s k _ _ _ k$. A három lehetséges pozíció bármelyikére beírva a negyedik s betűt, jó sorrendhez jutunk, így ebben az esetben 3 jó sorrendet kapunk.

(iii) $K = 3$: $s s k _ _ _ k$. A megmaradó két s betűt $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen írhatjuk a négy szabad pozíció közül kettőbe. E 6 sorrend közül csak 1 nem lesz jó, az, amikor a két s betű az utolsó két szabad pozíción van. Ebben az esetben tehát 5 jó sorrendet kapunk.

(iv) $K = 2$: $s k _ _ _ _ k$. A harmadik pozícióra ezután csak s betű kerülhet, másképpen itt elakadna a sor: $s k s _ _ _ k$. Így viszont lényegében az előző esethez, vagyis újabb 5 jó sorrendhez jutunk.

Minden lehetőséget megvizsgálva összesen 14 jó sorrendet kaptunk. Mivel a 8 pozícióból $\binom{8}{4} = 70$ -féleképpen választhatjuk ki azt a négyet, ahol s betű áll, a pénztáros az összes sorrendek $\frac{14}{70} = \frac{1}{5}$ -ében tudja csak fennakadás nélkül kiadni a jegyeket.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva most a „rossz” sorrendeket számoljuk össze. Az elakadás előtt egyenlő számú s és k betű szerepel, az elakadás helyén pedig k betű áll. Maga az elakadás így a $(2m + 1)$ -edik várakozónál következett be ($m = 1, 2, 3, 4$).

Módosítsuk most az ilyen sorozatokat a következőképpen: ha a $(2m + 1)$ -edik helyen kerül sor az elakadásra, akkor az első $(2m + 1)$ pozíción az s betűket cseréljük k betűkre, a k betűket pedig s -ekre. Az elakadás utáni pozíciókon ne változtassuk a betűket.

$$s s k k k | _ _ _ _ \rightarrow k k s s s | _ _ _ _.$$

Így olyan sorozathoz jutunk, amely 5 darab s és 3 darab k betűből áll. Megfordítva, ha tekintünk egy $(5s, 3k)$ sorozatot, akkor ebből egyértelműen kaphatunk egy rossz sorozatot: mivel több az s , mint a k , lesz egy legelső olyan pozíció, ahol az s betűk többségbe kerülnek, és erre valamelyik páratlanadik pozíción kerül sor. Az $s \leftrightarrow k$ cserét eddig a pozícióig bezárólag elvégezve egy rossz sorozathoz jutunk.

A rossz sorozatok száma így $\binom{8}{3} = 56$, a jó sorozatoké pedig $\binom{8}{4} - 56 = 14$.

Csötönyi Nóra (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A fenti leszámolásnak geometriai értelmezését is adhatjuk: egy-egy sorozatot az origóból induló töröttvonalal ábrázolhatunk: s betű esetén az $\mathbf{f}(1, 1)$, k betű esetén pedig az $\mathbf{l}(1, -1)$ vektorral lépünk tovább.

Így az origóból induló, a $(8; 0)$ pontba érkező töröttvonalakat kapunk. Egy útvonal akkor rossz, ha érinti – vagy metszi – az $y = -1$ egyenest. A „rossz” töröttvonalaknak az $y = -1$ egyenessel való első közös pontjáig haladó vektorok között hajtsuk végre az $\mathbf{f} \leftrightarrow \mathbf{l}$ cserét, így az origóból induló $(8, 2)$ pontban végződő útvonalhoz jutunk. Ilyen útvonal pedig $\binom{8}{3}$ darab van.

2. A fenti „tükrözésnek” egy másik, szemléletesebb végrehajtása és az ennek megfelelő leszámolás a következő:

Tükrözzük egy $(0, 0) \rightarrow (8; 0)$ rossz útvonalnak az $y = -1$ egyenessel való első közös pontja *utáni* részét az $y = -1$ egyenesre. Így a $(0, 0)$ -ból induló $(8, -2)$ -ben végződő $(3s, 5k)$ útvonalhoz jutunk. Megfordítva, minden ilyen útvonal nyilván metszi az $y = -1$ egyenest; az első közös pontra tükrözve az út további részét egy rossz sorozatot kapunk.

A rossz sorozatok száma tehát $\binom{8}{3}$.

3. Bármelyik fenti módszerrel kapjuk, hogy ha a pénztár előtt $2n$ darab vevő várakozik, az egyik felük 100, másik felük pedig 200 forinttal, akkor az összes sorrendek száma $\binom{2n}{n}$, a rosszaké pedig $\binom{2n}{n-1}$.

A pénztáros ilyenkor az összes sorrend $\frac{\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{n+1}$ -edréssében tudja fennakadás nélkül kiadni a jegyeket.

A tükrözéses módszerrel akkor is választ kapunk a feladat kérdésére, ha a 100 forinttal és 200 forinttal várakozók száma különböző. Ha n néző várakozik 100 forinttal és m 200 forinttal ($n \geq m$), akkor ugyanúgy kapjuk (3. ábra), hogy a rossz sorrendek száma $\binom{n+m}{m-1}$.

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]