

Megjegyzés az F. 3288. feladathoz

F. 3288. Legyenek n és k pozitív egészek és p prímszám úgy, hogy $p^k | n!$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n!$ osztható $(p!)^k$ -nal is.

A KöMaL 2000/1. számának 36–37. oldalán a fenti feladatra két megoldást is közöltünk. Amint arra *Kiss Gergely* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) felhívta a figyelmünket, az I. megoldás hibás, az állítás, amelyből az indukció kiindul, nem igaz. Abból ugyanis, hogy m a legkisebb olyan egész szám, amire $p^\ell | m!$, nem következik, hogy $m + p$ a legkisebb olyan pozitív egész, amelynek faktoriálisa $p^{\ell+1}$ -nel osztható. A legegyszerűbb ellenpélda a $p = \ell = 2$. Ekkor az a legkisebb m , amire $m!$ osztható 4-gyel, az $m = 4$; és $4!$ osztható 2^3 -nel is.

A megjelent hibás teljes indukciós bizonyítás helyett *Fried Ervin* az alábbi bizonyítást bocsátotta a lap rendelkezésére:

Legyen p rögzített prímszám, és jelölje $k(n)$ azt a legnagyobb kitevőt, amelyre $p^{k(n)}$ osztója $n!$ -nak. Elég az állítást $k(n)$ -re bizonyítani, hiszen $k < k(n)$ esetén $(p!)^k$ osztója $(p!)^{k(n)}$ -nek. (Az eddigiek csak az egyszerűbb számolást szolgálják.)

Azt kell tehát bizonyítani, hogy $(p!)^{k(n)}$ osztója $n!$ -nak. Ezt az állítást n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 1$ esetben $k(1) = 0$ következtében az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden n -nél kisebb természetes szám esetében, és vizsgáljuk $n!$ -t. Ha p nem osztója n -nek, akkor $k(n-1) = k(n)$ miatt $(p!)^{k(n)}$ osztója $(n-1)!$ -nak; így $n!$ -nak is.

Legyen most $n = pm$. Mivel p prímszám, azért az $n!$ -ban fellépő maximális p -hatvány megegyezik az $1 \cdot p, 2 \cdot p, \dots, m \cdot p$ számok szorzatában fellépő maximális prímszámhatvánnyal. Ez a szorzat pontosan $p^m \cdot m!$. Így $k(pm) = m + k(m)$. Bontsuk fel most az $n!$ -t $m+1$ tényező szorzatára. Az első m tényező a következő:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdots (p-1), \\ & \vdots \\ & (ip+1) \cdot (ip+2) \cdots ((i+1)p-1), \\ & \vdots \\ & ((m-1)p+1) \cdot ((m-1)p+2) \cdots (mp-1). \end{aligned}$$

Ezen tényezők mindegyike osztható $(p-1)!$ faktoriállissal, hiszen bármilyen t egész szám esetén t egymás utáni egész szám szorzata osztható $t!$ -sal. Ez a szorzat tehát osztható a $(p-1)!^m$ számmal. A fennmaradó tényező a $p^m \cdot m!$ szorzat. A p^m tényezőt az előző szorozathoz hozzávéve egy olyan szorzatot kapunk, amely osztható $(p!)^m$ -nel. Az indukciós feltevés és $m < n$ miatt $m!$ osztható $(p!)^{k(m)}$ -nel. A már belátott $k(n) = m + k(m)$ összefüggésből következik az állítás.