

Nevezzük az u és v szavakat ekvivalensnek, ha átalakíthatók egymásba egymásba a megadott lépésekkel, és jelöljük ezt $u \sim v$ -vel. Ezen kívül jelentse uv az u és v szavak egyszerű egymás után írását.

Lemma. Ha az u szó mindhárom betűt tartalmazza, v pedig tetszőleges szó, akkor $uvu \sim u$.

A lemmát a v hossza szerinti indukcióval igazoljuk. Ha v az üres szó, akkor $uvu = uu \sim u$. Ha v egyetlen betűből áll, akkor ezt a feltétel szerint u tartalmazza: $u = u_1vu_2$ alkalmas u_1 és u_2 szavakkal. Ekkor

$$uvu = u_1vu_2vu_1vu_2 \sim u_1vu_2vu_1vu_2vu_2 \sim u_1vu_2vu_2 \sim u_1vu_2 = u.$$

Tegyük most fel, hogy a lemma igaz k -nál rövidebb v esetén ($k \geq 2$), és legyen v hossza k . Írjuk fel v -t v_1v_2 alakban, ahol v_1 és v_2 k -nál rövidebb szavak. Az indukciós feltevést alkalmazva az u és v_2 , illetve v_2u és v_1 szavakra $uv_2u \sim u$, $(v_2u)v_1(v_2u) \sim v_2u$ és

$$uvu = uv_1v_2u \sim (uv_2u)v_1v_2u = u(v_2u)v_1(v_2u) \sim u(v_2u) \sim u.$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

Ezután bebizonyítjuk a feladat állítását. Nyilván elég igazolni, hogy minden legalább 9 hosszúságú szó ekvivalens egy nála rövidebbel. Tekintsünk egy legalább kilencbetűs szót. Írjuk fel ezt uvw alakban, ahol u és w a szó első, illetve utolsó 4 betűjéből áll. Ha u vagy w valamelyike csak kétféle betűt tartalmaz, akkor vagy van benne egymás után két egyforma betű, vagy pedig kétféle betűt tartalmaz váltakozva. A szó mindkét esetben triviálisan rövidíthető: az első esetben az ismétlődő betűk egyikét hagyhatjuk el, a másik esetben a négybetűs szó két fele ugyanaz, ezért az egyik fele elhagyható. Feltételezhetjük tehát, hogy u és w is mindhárom fajta betűből tartalmaz legalább egyet. Ebben az esetben a lemma alapján $uvw \sim u$ és $wvw \sim w$, ezért

$$uvw \sim uvwvw \sim uw.$$

Az uvw szó tehát ekvivalens a nála rövidebb uw szóval.

Kiss Gergely (Fazekas M, Főv. Gyak. Gimn., 11. o.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Nem minden kilencbetűs szó rövidíthető triviálisan. Az AB -vel kezdődő kilencbetűs szavak között 18 olyan van, amiben nincs két egymás utáni megegyező részlet. A megoldók többsége ezekre az esetekre egy-egy egyedi megoldást adott.