

Feltehető, hogy például $P(A) \leq P(B)$. Mivel nyilván $P(AB) \leq P(A)$, azért

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \leq P(B)(1 - P(B)) \leq \left(\frac{P(B) + (1 - P(B))}{2} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

a (kéttagú) számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség szerint. Jelölje másrészt $\bar{A}$ az A esemény tagadását; ekkor $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Alkalmazzuk a már bebizonyított $P(XY) - P(X)P(Y) \leq \frac{1}{4}$ egyenlőtlenséget az $X = B$, $Y = \bar{A}$ eseményekre:

$$(1) \quad P(B\bar{A}) - P(B)P(\bar{A}) \leq \frac{1}{4}.$$

A $B\bar{A}$ és BA egymást kizáró események, és $B\bar{A} + BA = B$, ezért $P(B\bar{A}) = P(B) - P(BA)$. Így (1) szerint

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &\geq P(B\bar{A}) - P(B)P(\bar{A}) = (P(B) - P(AB)) - (P(B) - P(B)P(A)) = \\ &= P(A)P(B) - P(AB), \end{aligned}$$

amit átrendezve:

$$P(AB) - P(A)P(B) \geq -\frac{1}{4},$$

bizonyítva a kívánt egyenlőtlenség másik felét.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

Megjegyzés. A bizonyított egyenlőtlenség éles: ha például $A = B$ az az esemény, hogy egy érmét feldobva „fejet” kapunk, akkor $P(AB) - P(A)P(B) = P(A) - P(A)^2 = \frac{1}{4}$. Ha B -nek viszont az A tagadását választjuk, akkor $P(AB) - P(A)P(B) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ teljesül.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.)