

Közismert, hogy ha egy háromszög oldalai a, b, c , kerülete $2s$, területe T , beírt körének sugara ϱ , a hozzáírt kör sugarai pedig ϱ_a, ϱ_b és ϱ_c , akkor

$$(1) \quad \varrho \cdot s = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b) = \varrho_c(s-c) = T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(A képletek bizonyításának vázlata a megoldás utáni *megjegyzésben* olvasható.)

Elegendő megmutatnunk, hogy a $\varrho_a \cdot \varrho_b = T$ és az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenlőségek ekvivalensek. Az (1) összefüggések szerint

$$\varrho_a \cdot \varrho_b = \frac{T}{s-a} \cdot \frac{T}{s-b} = \frac{T^2}{(s-a)(s-b)} = s(s-c).$$

Látható, hogy $\varrho_a \cdot \varrho_b = T$ pontosan akkor teljesül, ha $s(s-c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, azaz ha

$$s(s-c) = (s-a)(s-b).$$

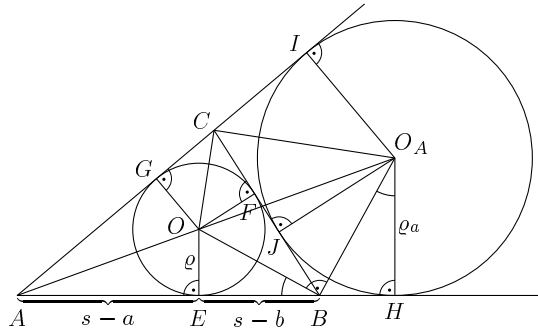
Mivel $2s = a + b + c$, azért ez ekvivalens az

$$(a+b+c)(a+b-c) = (c-a+b)(c+a-b)$$

egyenlőséggel. Elvégezve a szorzásokat

$$(a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2$$

adódik, amit rendezve és 2-vel osztva kapjuk az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggést. Ez éppen az, amit bizonyítani akartunk, hiszen egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével.



Megjegyzés. A képletek bizonyításához használjuk az *ábra* jelöléseit. Az ABC háromszög területe megegyezik az OAB , OBC és OCA háromszögek területének összegével. A három kis háromszög mindegyikében ϱ az O -ból induló magasság, amiből $2T = c \cdot \varrho + b \cdot \varrho + a \cdot \varrho = 2\varrho s$ adódik. Ha az O_AAB és az O_AAC háromszögek területének összegéből kivonjuk az O_ABC háromszög területét, akkor szintén az ABC háromszög területét kapjuk. Az O_A -ból húzott mindhárom magasság ϱ_a , ezért $2T = c \cdot \varrho_a + b \cdot \varrho_a - a \cdot \varrho_a = 2\varrho_a(s-a)$. Ugyanígy látható be, hogy $\varrho_b(s-b) = T = \varrho_c(s-c)$.

Az OB egyenes az ABC háromszög B -hez tartozó belső-, $O_A B$ pedig egyik külső szögfelezője, ezért $\angle OBO_A = 90^\circ$. Tehát $\angle OBE = \angle BO_A H$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Így az OBE és a $BO_A H$ derékszögű háromszögek hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlők. Ezért a megfelelő oldalaik aránya is megegyezik:

$$(2) \quad \frac{\varrho}{EB} = \frac{BH}{\varrho_a}.$$

Mivel egy körhöz egy külső pontból húzható két érintőszakasz hossza egyenlő, azért $AE = AG$, $BE = BF$ és $CF = CG$. Másrészt $AE + BE = c$, $BF + CF = a$ és $CG + AG = b$, amiből adódik, hogy pl. $BE = s - b$. Az $AI = AH$, $BH = BJ$, $CJ = CI$ és az $AH - BH = c$, $AI - CI = b$ és $BJ + CJ = a$ egyenlőségekből pedig pl. $BH = s - c$ következik. Vagyis a (2) egyenlőség szerint

$$\frac{\varrho}{s-b} = \frac{s-c}{\varrho_a}.$$

Felhasználva a $\varrho = \frac{T}{s}$ és a $\varrho_a = \frac{T}{s-a}$ összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\frac{T}{s(s-b)} = \frac{(s-c)(s-a)}{T},$$

amiből már egyszerűen adódik *Héron képlete*:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$