

Ha $a < -1$, akkor (1) negatív, tehát nem lehet négyzetszám. Ha $a = -1$ vagy $a = 0$, akkor (1) értéke 0 illetve 1, vagyis négyzetszám. Ha $a = 1$, akkor a nevező 0, és (1) nem értelmes. A továbbiakban feltételezzük, hogy $a \geq 2$.

$$\frac{a^{2000} - 1}{a - 1} = (a^{1000} + 1) \cdot (a^{500} + 1) \cdot \frac{a^{500} - 1}{a - 1}.$$

A három tényezőt rendre A , B , C -vel jelölve B és C osztója $A-2 = (a^{1000}-1)$ -nek, továbbá C osztója $B-2 = (a^{500}-1)$ -nek. Ebből következik, hogy az A , B és C közül bármelyik kettő legnagyobb közös osztója legfeljebb 2.

Három ilyen szám szorzata csak úgy lehet négyzetszám, ha mindegyikük külön-külön is négyzetszám vagy négyzetszám kétszerese. Az A és a B éppen 1-gyel nagyobbak az a^{1000} illetve a^{500} pozitív négyzetszámoknál, ezért nem lehetnek négyzetszámok.

Ha A és B is egy-egy négyzetszám kétszerese, akkor $4AB = 4a^{1500} + 4a^{1000} + 4a^{500} + 4$ négyzetszám. Ez azonban nem lehetséges, mert

$$4a^{1500} + 4a^{1000} + 4a^{500} + 4 > 4a^{1500} + 4a^{1000} + a^{500} = (2a^{750} + a^{250})^2$$

és

$$4a^{1500} + 4a^{1000} + 4a^{500} + 4 < 4a^{1500} + 4a^{1000} + 4a^{750} + a^{500} + 2a^{250} + 1 = (2a^{750} + a^{250} + 1)^2,$$

vagyis $4AB$ két szomszédos négyzetszám közé esik.

Az $a > 1$ esetben tehát (1) nem lehet négyzetszám. Összesen két megoldás van tehát: $a = -1$ és $a = 0$.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. Azt, hogy $a^{1000} + 1$ és $a^{500} + 1$ nem lehet egyszerre egy-egy négyzetszám kétszerese, ha $a > 1$, másképpen is bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy $a^{1000} + 1 = 2x^2$ és $a^{500} + 1 = 2y^2$. Ekkor

$$a^{250}y = \sqrt{\frac{a^{1000} + a^{500}}{2}} > \sqrt{\frac{a^{1000} + 1}{2}} = x.$$

Mivel egész számokról van szó, ebből következik, hogy

$$\sqrt{\frac{a^{1000} + a^{500}}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^{1000} + 1}{2}} + 1 > \frac{a^{500}}{\sqrt{2}} + 1.$$

Négyzetre emelés és rendezés után azt kapjuk, hogy $a^{500} < -\frac{2}{2\sqrt{2}-1} < 0$.

Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. o.t.)