

I. megoldás. A valós számokra kiterjesztett $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\tilde{f}(x) = 2x^2 + 8x + 7$ másodfokú függvény szigorúan monoton fogyó a $(-\infty, -2)$ intervallumon. Ugyanis például teljes négyzetté alakítás után adódik, hogy $\tilde{f}$ a minimumát az $x_0 = -2$ helyen veszi föl, így az f függvény értelmezési tartományában minden x -hez pontosan egy $\tilde{f}(x)$, és minden $\tilde{f}(x)$ függvényértékhez pontosan egy x érték tartozik: az f kölcsönösen egyértelmű, így létezik az f^{-1} inverz (1. ábra).

Az inverz kapcsolat meghatározásához az

$$y = 2x^2 + 8x + 7$$

összefüggésből kell az x értékét az y segítségével kifejezni az x -nek a -2 -nél kisebb értékeire. Kézenfekvő a másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazni, eszerint nullára rendezés után

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{\frac{1+y}{2}}.$$

Innen is látszik, hogy csak $y \geq -1$ esetben létezik olyan x , amelyre $\tilde{f}(x) = y$, az f értékkészlete a $(-1, +\infty)$ intervallum, ami f^{-1} értelmezési tartománya. Ilyen y értékek esetén viszont két olyan x van, amelyre $\tilde{f}(x) = y$, el kell döntenünk, hogy ezek közül melyik van f^{-1} értékkészletében, azaz f értelmezési tartományában, a $(-\infty, -2)$ intervallumban.

x_1 és x_2 a -2 -re szimmetrikusan helyezkednek el (2. ábra). A két szám közül a kisebbik $x_1 = -2 - \sqrt{\frac{1+y}{2}} < -2$.

Így az f inverze az $f^{-1} : (-1; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f^{-1} : y \mapsto -2 - \sqrt{\frac{1+y}{2}}$ függvény.

Megjegyzések. 1. A megoldásban f^{-1} megadásakor kényelmi szempontok miatt az y változót használtuk. Ennek természetesen semmi jelentősége, az utasításban épp így szerepelhetett volna a szokásos x , de bármilyen más változó is.

2. Bár nem tartozik a feladathoz, most az inverz függvény értékkészlete is rendelkezésre áll, így $f^{-1} : (-1; +\infty) \rightarrow (-\infty; -2)$.

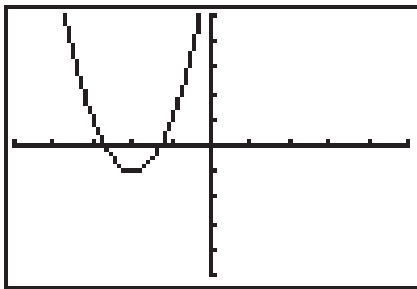
II. megoldás. Annak tisztázása után, hogy az f inverze létezik, grafikusan is megoldható a feladat. Ismeretes, hogy egy – kölcsönösen egyértelmű – f függvény inverzének a grafikonja az f grafikonjának a tükörképe az $y = x$ egyenesre. f és f^{-1} grafikonja látható a 3. ábrán.

Az $\tilde{f}$ függvény grafikonjának, a teljes parabolának az egyenlete $y = 2x^2 + 8x + 7$. Ismeretes, hogy egy görbének az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképének az egyenletét a változók $x \leftrightarrow y$ cseréjével kapjuk: $x = 2y^2 + 8y + 7$. Az inverz függvény grafikonja e görbének az $y = -2$ egyenes alatti része, ennek egyenlete:

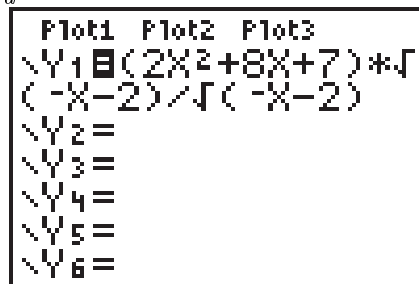
$$y = -2 - \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Az f függvény inverze tehát $f^{-1} : (-1; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f^{-1} : x \mapsto -2 - \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

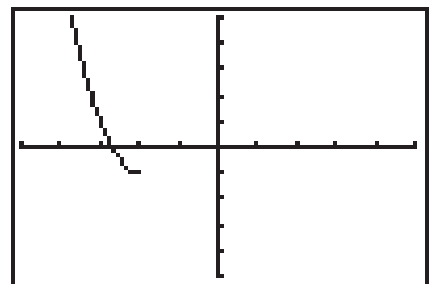
A 3. ábra grafikonját, a függvénynek és inverzének képét legegyszerűbben grafikus számológéppel rajzolhatjuk fel. Ha beírjuk az $y = 2x^2 + 8x + 7$ függvényt, a TI83 grafikus kijelzőjén az alábbi látható (1. ábra):



1. ábra



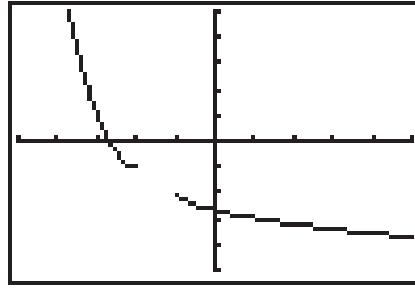
2. ábra



3. ábra

Kis trükkkel elérhető, hogy az értelmezési tartományt leszűkítsük: beszoroztunk $\frac{\sqrt{-x-2}}{\sqrt{-x-2}}$ -vel: a gyökjel alatt csak $x < -2$ esetén áll pozitív szám, egyébként a függvény nem értelmezett (2-3. ábra).

Ezután csak egy gombnyomás: **DrawInv Y1**, és megkaptuk a függvény inverzének a képét is (4. ábra).



4. ábra

III. megoldás. Ismeretes, hogy ha f_1 és f_2 két kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor az $f_1 \circ f_2$ összetett függvény is kölcsönösen egyértelmű, és az inverze a komponensek inverzeiből kapható, ha azokat fordított sorrendben fűzzük össze:

$$(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}.$$

Hétköznapiabb nyelven ez azt jelenti, hogy egy több lépésből álló műveletsor megfordítását a legutolsó művelet megfordításával kell elkezdenünk. Ez az ún. „zokni-cipő-elv”; az elnevezés remélhetőleg nem szorul magyarázatra.

Tekintsük most az alábbi függvényeket:

$$f_1(x) = x + 2; \quad f_2(x) = -x; \quad f_3(x) = x^2, \quad x > 0; \quad f_4(x) = 2x - 1.$$

Mivel az f függvényutasítás teljes négyzet alakja $f(x) = 2[-(x+2)]^2 - 1$, így

$$f : x \xrightarrow{f_1} x+2 \xrightarrow{f_2} -(x+2) \xrightarrow{f_3} [-(x+2)]^2 \xrightarrow{f_4} 2[-(x+2)]^2 - 1,$$

azaz $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

A komponensekről látható, hogy kölcsönösen egyértelműek, inverzeik rendre

$$f_1^{-1}(x) = -2 + x; \quad f_2^{-1}(x) = -x; \quad f_3^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0; \quad f_4^{-1} = \frac{x+1}{2}.$$

Az f inverze így $f^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}$, azaz

$$f^{-1} : x \xrightarrow{f_4^{-1}} \frac{x+1}{2} \xrightarrow{f_3^{-1}} \sqrt{\frac{x+1}{2}} \xrightarrow{f_2^{-1}} -\sqrt{\frac{x+1}{2}} \xrightarrow{f_1^{-1}} -2 + \left(-\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right),$$

tehát $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{\frac{x+1}{2}}$. A függvény értelmezési tartománya pedig az f értékészlete, a $(-1; +\infty)$ intervallum.

Megjegyzés. A feladatra sok hibás és hiányos megoldás érkezett. Eltekintve a szóhasználat felületességétől – többen a függvényt vélték tükrözni, nem pedig a grafikon – a legkirívóbb hiba az I. megoldás másodfokú egyenletének formális, hibás eredménye, $-2 \pm \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ mint az inverz függvényutasítás. A feladat megoldásainak áttekintése jó alkalom lehet minden olvasónknak a függvényekkel kapcsolatos fogalmak: értelmezési tartomány, értékészlet, összetett függvény, egyenlet, grafikon, inverz stb. átgondolására.