

I. megoldás. Legyen a körlap sugara R . Ha egy átmérő mentén vágjuk ketté a kört, akkor a kúp alapkörének kerülete egyenlő a félkör kerületével, vagyis $2r\pi = R\pi$, ahonnan $r = \frac{R}{2}$ az alapkör sugara, a kúpok magassága pedig

$$m = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

A kúp kétszeres térfogata

$$V = 2 \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi \frac{R}{2} \sqrt{3}}{3} = \frac{R^3 \pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4330127 \cdot \frac{R^3 \pi}{3}.$$

Vágjuk fel ezután két tetszőleges sugár mentén a körlapot, és készítsük el a két tölcseért. A két kúp alapkörének sugara r_1 és r_2 .

$$i_1 = \frac{R\pi\alpha}{180^\circ}, \quad \text{ahonnan} \quad r_1 = \frac{R\alpha}{360^\circ} i_2 = 2R\pi - i_1, \quad \text{ahonnan} \quad r_2 = R \left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ}\right).$$

Legyen $\frac{\alpha}{360^\circ} = x$ ($0 < x < 1$), és írjuk fel a térfogatok összegét x függvényként.

$$\begin{aligned} r_1 &= Rx, & m_1 &= \sqrt{R^2 - (Rx)^2} = R\sqrt{1 - x^2}, \\ V_1 &= \frac{(Rx)^2 \pi \cdot R\sqrt{1 - x^2}}{3} = \frac{R^3 \pi}{3} (x^2 \sqrt{1 - x^2}), \\ r_2 &= R(1 - x), & m_2 &= \sqrt{R^2 - R^2(1 - x)^2} = R\sqrt{1 - (1 - x)^2} = R\sqrt{2x - x^2}. \\ V_2 &= \frac{R^2(1 - x)^2 \pi \cdot R\sqrt{2x - x^2}}{3} = \frac{R^3 \pi}{3} ((1 - x)^2 \sqrt{2x - x^2}). \\ V_1 + V_2 &= \frac{R^3 \pi}{3} (x^2 \sqrt{1 - x^2} + (1 - x)^2 \sqrt{2x - x^2}). \end{aligned}$$

$\frac{R^3 \pi}{3}$ pozitív állandó, így a maximum keresésekor elegendő vizsgálni az

$$f(x) = x^2 \sqrt{1 - x^2} + (1 - x)^2 \sqrt{2x - x^2}$$

függvényt.

Láttuk, hogy az $f(x)$ függvény értéke az $\alpha = 180^\circ$, azaz $x = 0,5$ értékre $0,4330127$.

Azt kell eldöntenünk, van-e a függvénynek a $(0, 1)$ intervallumban ennél nagyobb értéke. A függvény ábrázolásához készíthetünk táblázatot, s ha a $0,5$ környezetét vizsgáljuk, hamarosan találni fogunk nagyobb értéket.

Legyen például $x = 0,3$, azaz $\alpha \approx 108^\circ$, ekkor

$$f(0,3) = 0,3^2 \sqrt{1 - 0,3^2} + (1 - 0,3)^2 \sqrt{0,6 - 0,3^2} \approx 0,435779,$$

ami azt jelenti, hogy a körcikkekkel formált tölcselek össztérfogata nem félkörök esetén lesz a legnagyobb.

Megjegyzés. A feladat kérdésére tagadó választ adhatunk akkor, ha találunk egy olyan szétvágást, amelynél a keletkezett térfogatok összege nagyobb, mint a felezéskor kapott kúpok térfogatának összege. A megoldók nagy része ezt az utat választotta.

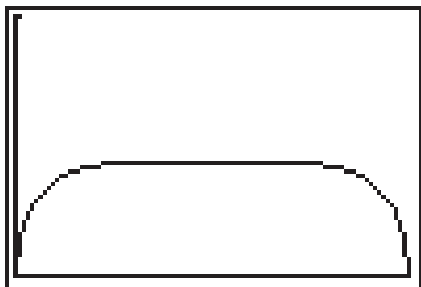
Többen azonban abba a hibába estek, hogy kiválasztottak egy felosztást, majd a kapott térfogatok összegét kisebbnek találva a felezéskor kapott térfogatnál, kijelentették, hogy valóban a felezéskor kapott térfogatok összege a legnagyobb. Látható a különbség: az állítás cáfolatához egyetlen példa elegendő, a bizonyításhoz azonban egyáltalán nem.

II. megoldás. A feladatot úgy is befejezhetjük, hogy az I. megoldás $f(x)$ függvényének megkeressük a maximumát. Csakhogy középiskolában tanult módszerekkel nemigen tudunk mit kezdeni a fenti $f(x)$ függvénnyel.

Nézzük meg, hogyan oldható meg a feladat a **Texas Instruments** TI83 típusú grafikus számológépének segítségével:

Az 1. ábra standard koordináta-rendszerben mutatja a függvény kirajzolt grafikonját. Látható, hogy az $x = \frac{1}{2}$ igen nagy környezetében mintha azonos lenne a függvényérték. Ha az $\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ pontra „zoom”-olunk, akkor egy lényegében vízszintes görbeszakaszt kapunk, a függvény olyan keveset változik, hogy ez nem elegendő a döntéshez: vajon $\frac{1}{2}$ -nél van-e a maximum?

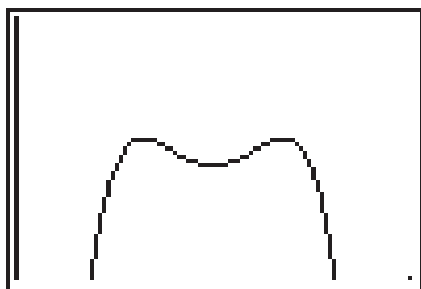
A grafikus megoldás kulcslépése a 2. ábrán látható: változtassuk meg az y koordinátatengely skálázását! Ekkor egyetlen gombnyomás után leolvasható a tagadó válasz (3. ábra), kiderül, hogy a függvény „középen behorpad”, a függvény nem az egyenlő sugarak esetén maximális.



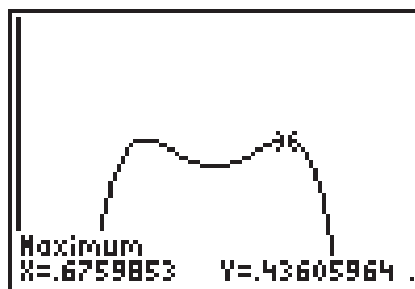
1. ábra

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=1
Xscl=1
Ymin=.42
Ymax=.45
Yscl=1
Xres=1
```

2. ábra



3. ábra



4. ábra

Az már csak ráadás, hogy a kalkulátor a lokális maximumok értékét is meg tudja adni, ez látható a 4. ábrán.

Mivel a számológép kerekítési hibáit is figyelembe kell vennünk, ajánlatos számolással újra ellenőriznünk, hogy $x = 0,5$ esetén valóban kisebb a függvényérték, mint $x = 0,675$ közelében.