

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha c gyöke az $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$ egyenletnek, akkor $-\frac{c+1}{c}$ és $-\frac{1}{c+1}$ is gyökök. Valóban, a $c^3 - 3c - 1 = 0$ összefüggés felhasználásával

$$\begin{aligned}\left(-\frac{c+1}{c}\right)^3 - 3\left(-\frac{c+1}{c}\right) - 1 &= -\frac{1}{c^3}((c+1)^3 - 3c^2(c+1) + c^3) = \\ &= -\frac{1}{c^3}(-c^3 + 3c + 1) = \frac{1}{c^3}(c^3 - 3c - 1) = 0,\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{c+1}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{c+1}\right) - 1 &= -\frac{1}{(c+1)^3}(1 - 3(c+1)^2 + (c+1)^3) = \\ &= -\frac{1}{(c+1)^3}(c^3 - 3c - 1) = 0.\end{aligned}$$

A $-\frac{c+1}{c}$ és $-\frac{1}{c+1}$ gyökök különbözők, mivel ellenkező esetben $(c+1)^2 = c$, azaz $c^2 + c + 1 = 0$; ilyen c valós szám azonban nincsen.

Mivel $f(1) = -3 < 0 < 1 = f(2)$, azért az egyenletnek létezik olyan c gyöke, amelyre $1 < c < 2$. Ekkor a $-\frac{c+1}{c}$, $-\frac{1}{c+1}$ gyökök negatívak, így $x_3 = c$. Másrészt

$$-\frac{1}{c+1} = -\frac{c+1}{(c+1)^2} = -\frac{c+1}{c+(c^2+c+1)} > -\frac{c+1}{c},$$

tehát $x_1 = -\frac{c+1}{c}$ és $x_2 = -\frac{1}{c+1}$. Ezért

$$\begin{aligned}x_3^2 - x_2^2 - x_3 + x_1 &= c^2 - \frac{1}{(c+1)^2} - c - \frac{c+1}{c} = \\ &= \frac{c^3(c^2+2c+1) - c - c^2(c^2+2c+1) - (c+1)^3}{c(c+1)^2} = \frac{c^5 + c^4 - 2c^3 - 4c^2 - 4c - 1}{c(c+1)^2} = \\ &= \frac{(c^2+c+1)(c^3-3c-1)}{c(c+1)^2} = 0.\end{aligned}$$

Nagy Tamás (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. A Viète-formulákat használjuk: $x^3 - 3x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ szerint

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, (1)x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3, (2)x_1x_2x_3 = 1. (3)$$

Az (1)-ből és (3)-ból $x_1x_2(x_1+x_2) = -1$, azaz

$$x_1^2x_2 + x_2x_1^2 + 1 = 0, \quad \text{hasonlóan} (4)x_3^2x_1 + x_3x_1^2 + 1 = 0. (5)$$

Mivel $x_1 < x_2 < x_3$ és $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, azért $x_1 < 0$, így $x_2 < x_3$ szerint (4)-ből és (5)-ből

$$x_2 = \frac{-x_1^2 + \sqrt{x_1^4 - 4x_1}}{2x_1}, \quad x_3 = \frac{-x_1^2 - \sqrt{x_1^4 - 4x_1}}{2x_1}.$$

Tehát

$$\begin{aligned}x_3^2 - x_2^2 - x_3 + x_1 &= \frac{4x_1^2\sqrt{x_1^4 - 4x_1}}{4x_1^2} + \frac{x_1^2 + \sqrt{x_1^4 - 4x_1}}{2x_1} + x_1 = \\ &= \frac{(2x_1 + 1)\sqrt{x_1^4 - 4x_1} + 3x_1^2}{2x_1};\end{aligned}$$

ez pontosan akkor nulla, ha

$$(6) \quad 3x_1^2 = -(2x_1 + 1)\sqrt{x_1^4 - 4x_1}.$$

Tegyük fel, hogy (6) jobb oldala negatív, azaz $x_1 > -\frac{1}{2}$. Ekkor $x_2 > x_1 > -\frac{1}{2}$, ezért $x_3 = -(x_1 + x_2) < 1$, ami nem lehet, hiszen az I. megoldásban láttuk, hogy az egyenlet legnagyobb gyöke nagyobb, mint 1. Így (6) ekvivalens a két oldal négyzetének egyenlőségével:

$$9x_1^4 = (2x_1 + 1)^2x_1(x_1^3 - 4) = (2x_1 + 1)^2x_1(3x_1 - 3),$$

$$\begin{aligned}
9(3x_1 + 1) &= 9x_1^3 = 3(4x_1^2 + 4x_1 + 1)(x_1 - 1), \\
9x_1 + 3 &= 4x_1^3 - 3x_1 - 1, \\
0 &= 4(x_1^3 - 3x_1 - 1),
\end{aligned}$$

ami valóban igaz; ezért a feladat által kívánt összefüggés is teljesül.

Balka Richárd (Sárvár, Tinódi Sebestyén Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A harmadfokú egyenlet gyökeit előállító *Cardano-képlet* segítségével az egyenlet gyökei „pontosan” is meghatározhatók: $x_1 = 2 \cos 220^\circ$, $x_2 = 2 \cos 100^\circ$, $x_3 = 2 \cos 20^\circ$. Ezután a feladat állítása a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulák felhasználásával igazolható.

Bálint Gergely (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.)