

A két egyenes metszéspontját jelöljük O -val. Húzzunk P -n keresztül az egyenesekre merőlegeseket, legyenek ezek AD és BC az 1. ábra szerint. Irányított szögekkel számolunk.

$$\begin{aligned} XPA \sphericalangle + CPY \sphericalangle &= \\ &= YPD \sphericalangle + CPY \sphericalangle = CPD \sphericalangle, \end{aligned}$$

ami az X, Y -től független állandó, jelöljük az értékét γ -val. (Nyilván $COA \sphericalangle = CPD \sphericalangle = \gamma$, mivel merőleges szárú szögek.)

Jelöljük az XPA szöget δ -val, ekkor tehát $CPY \sphericalangle = \gamma - \delta$, és az XAP, PCY derékszögű háromszögekből

$$PX = \frac{AP}{\cos \delta}, \quad PY = \frac{CP}{\cos(\gamma - \delta)}.$$

Így $PX \cdot PY = \frac{AP \cdot CP}{\cos \delta \cdot \cos(\gamma - \delta)}$ pontosan akkor minimális, ha $\cos \delta \cdot \cos(\gamma - \delta)$ maximális. Mivel $\cos \delta \cdot \cos(\gamma - \delta) = \frac{1}{2}(\cos \gamma + \cos(2\delta - \gamma))$, azért

$$\cos \delta \cdot \cos(\gamma - \delta) \leq \frac{1}{2}(\cos \gamma + 1)$$

és egyenlőség lehetséges, ha $\delta = \frac{\gamma}{2}$. A szerkesztendő pontokat tehát a CPD szög belső szögfelezője metszi ki az O csúcsszög száraiból. A szerkesztést ezzel egy szög felezésére vezettük vissza. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha P az X, Y által meghatározott szögtartomány külső pontja (2. ábra), illetve ha az XOY szög tompaszög.

Pach Péter Pál (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.) *Sipos Ádám* (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.) és

Soproni Péter (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.) dolgozatai alapján

