

Nyilván b nem lehet 0 és -1 ; beszorozva $b(b+1)$ -gyel

$$(1) \quad (a+1)(b+1) = cab.$$

Ha $a = 0$, akkor (1)-ből $b = -1$ következnek, ezt pedig kizártuk; így $a \neq 0$. Ha $a = -1$, akkor $0 = cab = -cb$ miatt $c = 0$, azaz $a = -1$, $c = 0$ tetszőleges (0-tól és -1 -től különböző) b -vel megoldás. A továbbiakban feltesszük, hogy (b -hez hasonlóan) $a \notin \{-1; 0\}$.

Az (1) jobb oldala osztható a -val, így $a \mid (a+1)(b+1)$. Mivel a és $a+1$ relatív prímek, azért $a \mid b+1$ és hasonlóan $b \mid a+1$.

I. Ha $a, b > -1$, akkor a és b pozitív, így az iménti oszthatóságokból $a \leq b+1$ és $b \leq a+1$ következik. Ekkor $a \leq b+1 \leq a+2$, ezért b csak $a-1$, a vagy $a+1$ lehet.

Ha $b = a-1$, akkor $b \mid a+1$ miatt $\frac{a+1}{a-1} \geq 2$, azaz $a \leq 3$; ebben az esetben a következő megoldásokat kapjuk:

$a = 2, b = 1, c = 3$ és $a = 3, b = 2, c = 2$. Ha $b = a$, akkor hasonlóan $\frac{a+1}{a} \geq 2$ miatt $a \leq 1$, ebből az $a = b = 1$, $c = 4$ megoldást kapjuk. Ha pedig $b = a+1$, akkor a $b = a-1$ esetben kapott megoldásokhoz jutunk a és b szerepét felcserélve: $a = 1, b = 2, c = 3$ és $a = 2, b = 3, c = 2$.

II. Ha $a < -1$ és $b > -1$, akkor $b > 0$, így $a \mid b+1$ szerint $-a \leq b+1$ és $b \mid a+1$ miatt $b \leq -a-1$; ezért $-a \leq b+1 \leq -a-1+1 = -a$, azaz $b = -a-1$. Az egyenletbe visszahelyettesítve ekkor az

$$a = t, \quad b = -t-1, \quad c = 1 \quad (t < -1)$$

megoldásokat kapjuk. Hasonlóan, az $a > -1 > b$ esetben az

$$a = t, \quad b = -t-1, \quad c = 1 \quad (t > 0)$$

megoldásokhoz jutunk.

Megmutatjuk, hogy az eddigieken kívül nincs több megoldás. A még hátralévő $a, b < -1$ esetben ugyanis $a \mid b+1$ miatt $a \geq b+1$, és $b \mid a+1$ miatt $b \geq a+1$, tehát $a \geq b+1 \geq a+2$, ami lehetetlen.

Siroki László (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.t.) *Venter György* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)