

I. megoldás. Tekintsünk egy páratlan prímszámot. Legyen ez a $2k + 1$. Ekkor $(2k + 1)^k$ a feltételnek megfelelő szám. Ennek ugyanis $k + 1$ darab osztója van: $1, 2k + 1, (2k + 1)^2, \dots, (2k + 1)^k$. Prímtényezős felbontása $(2k + 1)^k$, és ha az alaptól kivonjuk a kitevőt, éppen $(k + 1)$ -et, az osztók számát kapjuk. Ez bármelyik $(2k + 1)$ alakú prímszám k -adik hatványára igaz. Mivel végtelen sok prímszám van (ezt könnyen igazolhatjuk indirekt módon), és közülük csak egy páros, így végtelen sok páratlan prím is van. Ezért végtelen sok, a feladat feltételének eleget tevő természetes szám van.

Jelitai Kálmán (Budapest, Szent István Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Mutatunk egy módszert, amellyel végtelen sok, a feladat feltételének eleget tevő számot készíthetünk. Válasszunk olyan p_1 és p_2 prímszámokat, amelyek 3-mal osztva 1, illetve 2 maradékot adnak, azaz $p_1 \equiv 3 \pmod{3}$ és $p_2 \equiv -1 \pmod{3}$ teljesül. Ismeretes, hogy végtelen sok ilyen p_1 és p_2 prímszám létezik. Következik ez például *Dirichlet* tételéből, hiszen ez annak csak speciális esete (Erdős Pál–Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon, Szeged, 1996., 67. o.). Tekintsük ezután a $k = \frac{p_1 p_2 - 2}{3}$ számot, ez nyilván egész. Megmutatjuk, hogy a $p_1 \cdot p_2^k$ szám eleget tesz a feladat feltételének. Ezek osztói: $1, p_2, p_2^2, \dots, p_2^k, p_1, p_1 p_2, \dots, p_1 p_2^k$; ezek száma $2(k + 1)$, vagyis $2 \left(\frac{p_1 p_2 - 2}{3} + 1 \right)$, ami pedig valóban egyenlő $p_1 p_2 - \frac{p_1 p_2 - 2}{3}$ -mal.

A feladat állítását ezzel beláttuk.

Baharev Ali (Vác, Boronkay Gy. Gimn., 12. o.t.)