

Bebizonyítjuk, hogy az oldalak legfeljebb 18 pontban metszhetik egymást. Ennyi metszéspont lehetséges, például az 1. ábrán látható módon.

Annak bizonyításához, hogy 18-nál több metszéspont nem jöhet létre, három segédtételt használunk fel.

1. segédtétel. Egy konvex sokszöget egy egyenes legfeljebb 2 pontban metszhet.

Bizonyítás. A két legtávolabbi metszéspontot összekötő szakasz a belsejével kiegészített sokszög része, ezért ez a szakasz nem metszheti a sokszög határát.

2. segédtétel. Egy ötszöget egy egyenes, amelyik egyik csúcsára sem illeszkedik, legfeljebb 4 pontban metszhet.

Bizonyítás. Az egyenes mindegyik oldalt legfeljebb egy pontban metszi, tehát 5-nél több metszéspont biztosan nem lehetséges. A metszéspontok az egyenest két félegyenesre és néhány szakaszra osztják. Ezek a darabok felváltva az ötszögon kívül és belül helyezkednek el; a két félegyenes biztosan kívül. Ebből következik, hogy a szakaszok száma páratlan, és a metszéspontok száma páros. A metszéspontok száma tehát 5 sem lehet.

3. segédtétel. Két sokszög, amelyek csúcsai nem illeszkednek a másik sokszög oldalegyeneseire, csak páros sok pontban metszheti egymást.

Bizonyítás. Az egyik sokszög kerületén körbehaladva, mindegyik metszéspontnál a sokszög belsejéből a külsejébe, vagy a külsejéből a belsejébe lépünk át. A teljes körbehaladás után ugyanabba a síkrészbe érünk vissza, tehát összesen ugyanannyiszor lépünk belülről kívültre, mint kívülről belültre.

Ezek után bebizonyítjuk, hogy két ötszög legfeljebb 18 pontban metszi egymást. Legyen a két ötszög A és B . A mindegyik oldalegyenese legfeljebb 4 pontban metszi B -t a 2. segédtétel szerint; ez összesen legfeljebb 20 metszéspont. 19 metszéspont a 3. segédtétel szerint nem lehetséges. Már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy a metszéspontok száma 20 sem lehet.

Ha a metszéspontok száma 20, akkor A mindegyik oldala B -nek 4 oldalát metszi, és megfordítva, B mindegyik oldala A -nak 4 oldalát metszi. Ebből az 1. segédtétel alapján az is következik, hogy A és B konkáv.

Mivel A konkáv, van konvex és konkáv szöge is, és van három szomszédos oldala: a , b és c úgy, hogy a és b konvex, b és c konkáv szögben csatlakozik egymáshoz (2. ábra).

Legyen B -nek az az oldala, amit b nem metsz, d . Ez az oldal metszi A -nak 4 oldalát, tehát metszi a -t és c -t is; hasonlóképpen b is metszi B -nek a többi 4 oldalát. Mivel a és c a b egyenes ellentétes oldalain vannak, a d szakasz metszi a b egyenest. Így azonban a b egyenes a B ötszög valamennyi oldalát metszi, ez pedig ellentmond a 2. segédtételnek. A metszéspontok száma tehát tényleg nem lehet 20.

A két ötszög tehát legfeljebb 18 pontban metszi egymást.

Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. o.t.)

