

I. megoldás. A válasz: nem. Megadunk olyan, a feltételeknek megfelelő f és g függvényeket, amelyekre $f + g$ nem veszi fel a 0-t.

Legyen $f(x) = x$. Ez nyilván szigorúan monoton nő, és értékkészlete a teljes $\mathbf{Q}$.

Legyen

$$g(x) = x - 3, \text{ ha}$$

$$x \leq 1; -2 \frac{1}{x} < x < 2; x - 3, \text{ ha } x \geq 2.$$

A g függvény a $(-\infty, 1]$, $(1, 2)$ és $[2, \infty)$ intervallumokban külön-külön szigorúan monoton nő, e három intervallumra megszorítva értékkészlete a $(-\infty, -2]$, $(-2, -1)$, illetve $[-1, \infty)$ intervallumok racionális elemeiből áll. Ezért igaz, hogy g szigorúan monoton nő, és értékkészlete a teljes $\mathbf{Q}$.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $x \in \mathbf{Q}$, amelyre $f(x) + g(x) = 0$. Ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 2$, akkor $f(x) + g(x) = 2x - 3$, ami csak $x = \frac{3}{2}$ esetén lenne 0, de ez a szám nem szerepel a megadott intervallumokban.

Ha $1 < x < 2$, akkor

$$f(x) + g(x) = x - \frac{2}{x} = 0,$$

$$x^2 = 2.$$

Ez pedig nem lehetséges, mert ilyen x racionális szám nincs.

Tehát $f + g$ nem veszi fel a 0-t.

Máthé András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

II. megoldás. Legyen ismét $f(x) = x$. Konstruálunk egy olyan g függvényt, amely szigorúan monoton nő, értékkészlete a teljes $\mathbf{Q}$, és $f + g$ nem veszi fel a 0-t.

Legyen (a_n) egy racionális számokból álló, szigorúan növekvő sorozat, amely $\sqrt{2}$ -höz tart; (b_n) pedig legyen egy ugyancsak racionális számokból álló és $\sqrt{2}$ -höz tartó, de szigorúan monoton csökkenő sorozat. Ilyen sorozatot készíthetünk pl. a $\sqrt{2} = 1,414213 \dots$ tizedesjegyeiből, pl. $a_1 = 1$; $a_2 = 1,4$; $a_3 = 1,41$; $a_4 = 1,414$; $\dots$, illetve $b_1 = 2$; $b_2 = 1,5$; $b_3 = 1,42$; $b_4 = 1,415$; $\dots$.

Tetszőleges pozitív egész n esetén legyen $g(a_n) = -b_n$ és $g(b_n) = -a_n$. Az $[a_n, a_{n+1}]$ és $[b_{n+1}, b_n]$ intervallumokban legyen g lineáris. $x < a_1$ és $x > b_1$ esetén legyen $g(x) = x - a_1 - b_1$. Ez a függvény a $(-\infty, \sqrt{2})$, illetve $(\sqrt{2}, \infty)$ intervallumokon egymáshoz kapcsolódó lineáris szakaszokból áll, a két fél grafikon a $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ponthoz torlódik.

A függvény értékkészlete a $[-a_{n+1}, -a_n]$ és $[-b_n, -b_{n+1}]$ ($n = 1, 2, \dots$) valamint a $(-\infty, -b_1]$ és $[-a_1, \infty)$ intervallumok racionális elemeiből áll. Az intervallumok uniója a $-\sqrt{2}$ kivételével az összes valós számot, és ezáltal az összes racionális számot tartalmazza. A g függvény értékkészlete tehát a teljes $\mathbf{Q}$.

Ha $x < \sqrt{2}$, akkor $g(x) < -\sqrt{2}$ és $f(x) + g(x) < \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. Ha pedig $x > \sqrt{2}$, akkor $g(x) > -\sqrt{2}$ és $f(x) + g(x) > \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. Ezért az $f + g$ függvény valóban nem veszi fel a 0-t.

Zábrádi Gergely (Győr, Révai M. Gimn. 12. o.) dolgozata alapján

