

Írjuk le a labda mozgását az „álló” (a lemezjátész dobozához rögzített) koordináta-rendszerből nézve. Jelöljük a labda tömegközéppontjának sebességét  $\vec{v}$ -vel, gyorsulását  $\vec{a}$ -val, a labda forgási szögsebességét  $\vec{\omega}$ -val, szöggyorsulását  $\vec{\beta}$ -val, a síklap által kifejtett súrlódási erőt pedig  $\vec{S}$ -sel. Ezek a mennyiségek vízszintes irányú vektorok. (A labda függőleges tengely körül is foroghat, ha kezdetben volt ilyen irányú szögsebessége, de ez a mozgás független a többitől, ezért a továbbiakban nem foglalkozunk vele.) Érdemes bevezetni még két további jelölést: labda középpontjából a legalsó pontjába lefelé mutató  $\vec{r}$  vektort, valamint a korong  $\vec{\Omega}$  szögsebesség-vektorát. (Mindkét vektor függőleges irányú és időben állandó.)

Ezekkel a vektormennyiségekkel tömör alakban felírhatjuk az  $m$  tömegű,  $\Theta$  tehetetlenségi nyomatékú labda mozgásegyenleteit. A dinamika alaptörvénye szerint

$$(1) \quad \vec{S} = m\vec{a},$$

a forgómozgás alaptörvénye szerint pedig

$$(2) \quad \vec{r} \times \vec{S} = \Theta \vec{\beta}.$$

A labda tisztán gördül a síklapon, legalsó pontjának sebessége tehát ugyanakkora, mint az érintkezésnél a síklap megfelelő (a lemezjátész tengelyétől kiinduló  $\vec{R}$  vektorral jellemzett) pontjának sebessége. Mivel a labda legalsó pontjának sebessége a tömegközéppont  $\vec{v}$  sebességének és a forgásból származó  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  kerületi sebességnek összege, a síklap megfelelő pontjának sebessége pedig  $\vec{\Omega} \times \vec{R}$ , a csúszásmentes gördülés feltétele:

$$(3) \quad \vec{v} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{R}.$$

Képezzük a (3) egyenletben szereplő mennyiségek változási sebességét! Mivel  $\vec{\Omega}$  és  $\vec{r}$  időben állandó vektorok,  $\vec{R}$  változási sebessége pedig éppen a labda  $\vec{v}$  sebességvektora, írhatjuk, hogy

$$(4) \quad \vec{a} + (\vec{\beta} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

Fejezzük ki (1)-ből az  $\vec{S}$  vektort és helyettesítsük be (2)-be, majd onnan fejezzük ki  $\vec{\beta}$ -t és írjuk be (4)-be:

$$(5) \quad \vec{a} + \frac{m}{\Theta} [(\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{r}] = \vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

A szögletes zárójelben álló vektor  $\vec{a}$  és  $\vec{r}$  merőlegessége miatt  $r^2 \cdot \vec{a}$  (ahol  $r$  a labda sugara), továbbá  $\Theta = \frac{2}{5}mr^2$  felhasználásával (5) ilyen alakra hozható:

$$(6) \quad \vec{a} + \frac{5}{2}\vec{a} = \vec{\Omega} \times \vec{v}, \quad \text{azaz} \quad \vec{a} = \frac{2}{7}\vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy a labda sebességvektora  $\frac{2}{7}\vec{\Omega}$  szögsebességgel *egyenletesen* forog körbe, a labda tömegközéppontja tehát ilyen szögsebességű egyenletes körmozgást végez. A körpálya középpontja általában *nem* esik egybe a lemezjátész tányérjának közepével, hanem a kezdőfeltételektől (az indítás helyétől és a kezdősebességtől) függően máshol is lehet.

*Megjegyzések:* 1. Vigyázat: a merev testek térbeli forgómozgásának egyenlete általában nem olyan „egyszerű”, mint ahogy az a (2) egyenletben szerepel, hanem csak a perdület vektorának változási sebességével fogalmazható meg. Jelen esetben (a labda gömbszimmetriája miatt) a perdület  $\Theta \cdot \vec{\omega}$  alakú, s ennek változási sebessége (mivel  $\Theta$  nem csak a testhez rögzített rendszerből, de az inerciarendszerből nézve is állandó)  $\Theta \vec{\beta}$ .

2. A labda tömegközépponti szögsebességének és a lemezjátész szögsebességének aránya a jelen esetben (tömör, homogén labdánál)  $\frac{2}{7}$ , általában pedig  $\frac{\Theta}{\Theta + mr^2}$ . Vékonyfalú labdánál (teniszlabda, pingponglabda) például  $\Theta = \frac{2}{3}mr^2$ , ilyenkor a legnagyobb a két szögsebesség aránya, nevezetesen  $\frac{2}{5}$ .

(G. P.)

