

Először belátjuk, hogy ha a körök metszik egymást, akkor a négyszög húrnégyszög. A konvex négyszög átlói metszik egymást, ezért az AC és BD átlók felező merőlegesei is: legyen ezek közös pontja O . Jelölje a feladatban szereplő AC átmérőjű kört k_1 , a BD átmérőjű kört pedig k_2 .

Ha az O pontot összekötjük a k_1 , illetve a k_2 körök pontjaival, egy-egy forgáskúpot kapunk. Az O -t a k_1 és k_2 metszéspontjaival összekötő szakaszok mindkét forgáskúpnak alkotói, tehát a két forgáskúp alkotói egyenlő hosszúságúak. (Ha O egybeesik valamelyik átló felezőpontjával, akkor az egyik (esetleg mindkét) forgáskúp alkotója helyett a k_1 , illetve a k_2 kör sugara értendő.) A k_1 és k_2 körök pontjai tehát egyenlő távolságra vannak O -tól, így van olyan O középpontú gömb, amelyen k_1 és k_2 összes pontja, tehát A, B, C, D is rajta van.

A, B, C, D e gömb különböző, egy síkban levő pontjai, és mivel a gömb minden síkmetszete kör, azért van olyan kör, amelyen mind a négy pont rajta van. Így az $ABCD$ négyszög valóban húrnégyszög.

Most bebizonyítjuk, hogy ha az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, akkor a k_1 és k_2 körök metszik egymást. Használjuk az eddigi jelöléseket, és legyen $\mathcal{S}$ az $ABCD$ húrnégyszög síkja. Az O középpontú, OA sugarú gömb metszete $\mathcal{S}$ -sel (a gömb főköre) adja a húrnégyszög körülírt körét. Ezt a gömböt az AC és a BD átlókat tartalmazó, $\mathcal{S}$ -re merőleges síkok egy-egy körben metszik: mivel átmérőjük AC , illetve BD , ezek a körök éppen k_1 és k_2 .

Ekkor az AD és BD átlók metszéspontjában az $\mathcal{S}$ síkra állított merőleges egyenes két pontban metszi a gömböt: ezek a k_1 és k_2 körök metszéspontjai is, tehát az AC és BD átmérőjű, $\mathcal{S}$ -re merőleges körök valóban metszik egymást.

Bálint Gergely (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.)

