

Legyen $a \circ b = ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$; tehát $a \circ b$ jelöli azt a számot, amelyet a és b letörlésekor a táblára írunk. Látható, hogy ez a művelet kommutatív. Belátjuk, hogy $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, így asszociatív is:

$$(a \circ b) \circ c = ((a + 1)(b + 1) - 1 + 1)(c + 1) - 1 = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1, a \circ (b \circ c) = (a + 1)((b + 1)(c + 1) - 1 + 1) - 1 = (a +$$

Ez azt jelenti, hogy a végeredményül kapott szám nem függ a letörölt számok sorrendjétől. Ezek után belátjuk, hogy tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n$ számokra

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1) - 1.$$

A bizonyítást n -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Az imént beláttuk, hogy $n \leq 3$ esetén igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely n -re. Ekkor ezt felhasználva

$$\begin{aligned} x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n \circ x_{n+1} &= ((x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1) - 1) \circ x_{n+1} = \\ &= (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1)(x_{n+1} + 1) - 1, \end{aligned}$$

tehát $(n + 1)$ -re és így minden természetes számra is igaz. Ezért mindig ugyanaz a szám marad a táblán, éspedig

$$(1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot \dots \cdot (20 + 1) - 1 = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 21 - 1 = 21! - 1.$$