

Először kifejezzük a PQR sík és O távolságát az OP , OQ és OR szakaszok hosszának segítségével. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, amelynek origója O , és tengelyei az OP , OQ , OR irányokba mutatnak. Az OP , OQ , OR távolságokat d_1 , d_2 , d_3 -mal jelölve, a PQR sík egyenletét tengelymetszetes alakban írva $\frac{x}{d_1} + \frac{y}{d_2} + \frac{z}{d_3} = 1$, amiből a távolság

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}}}.$$

A továbbiakban tehát azt kell igazolnunk, hogy az $\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}$ kifejezés értéke nem függ a P , Q , R pontok megválasztásától.

Vegyük most fel koordináta-rendszerünket az ellipszoid tengelyei irányában. Így az ellipszoid egyenlete

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

alakban írható, ahol a , b és c a féltengelyek hossza.

Legyen a három koordináta-egységvektor $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, ezen kívül $\frac{\overrightarrow{OP}}{d_1} = \mathbf{v}_1$, $\frac{\overrightarrow{OQ}}{d_2} = \mathbf{v}_2$, $\frac{\overrightarrow{OR}}{d_3} = \mathbf{v}_3$. Végül legyen $u_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{v}_j$.

A feltételek szerint a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorok egységnyi hosszúak és páronként merőlegesek. Ebből következik, hogy tetszőleges i -re

$$\mathbf{e}_i = u_{i1}\mathbf{v}_1 + u_{i2}\mathbf{v}_2 + u_{i3}\mathbf{v}_3$$

és

$$u_{i1}^2 + u_{i2}^2 + u_{i3}^2 = |\mathbf{e}_i|^2 = 1.$$

(1)-be behelyettesítve P , Q , R koordinátáit, azaz a $(d_j u_{1j}, d_j u_{2j}, d_j u_{3j})$ számhármassokat,

$$\frac{(d_j u_{1j})^2}{a^2} + \frac{(d_j u_{2j})^2}{b^2} + \frac{(d_j u_{3j})^2}{c^2} = 1, \quad (j = 1, 2, 3)$$

azaz

$$\frac{1}{d_j^2} = \frac{u_{1j}^2}{a^2} + \frac{u_{2j}^2}{b^2} + \frac{u_{3j}^2}{c^2}. \quad (j = 1, 2, 3)$$

Ezeket összegezve j értékeire,

$$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} = \frac{u_{11}^2 + u_{12}^2 + u_{13}^2}{a^2} + \frac{u_{21}^2 + u_{22}^2 + u_{23}^2}{b^2} + \frac{u_{31}^2 + u_{32}^2 + u_{33}^2}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Megjegyzés. A megoldás szó szerint ugyanez akárhány dimenzióban.