

Ha ez az egyenlőség fennáll a p , q és r (nem feltétlenül pozitív) prímszámokra, akkor $p - q - r \neq 0$ ($q \neq 0$, $r \neq 0$); mindkét oldalt $qr(p - q - r)$ -rel megszorozva:

$$rq = (p - q - r) \cdot r + (p - q - r)q, \quad \text{azaz } rq = (p - q - r)(r + q).$$

Az r és q prímekek, így az rq szorzatnak 8 osztója lehet: $1, -1, r, q, -r, -q, rq, -rq$, tehát $p - q - r$, illetve $r + q$ csakis ezek közül kerülhet ki. Nézzük végig az összes esetet:

I. $p - q - r = 1$. Ekkor $r + q = rq$, vagyis $0 = rq - r - q$, amiből $1 = (q - 1)(r - 1)$, tehát q és r vagy 0 (akkor nem lennének prímekek), vagy $q = r = 2$, ahonnan $p = 5$.

II. $p - q - r = -1$. Ekkor $r + q = -rq$, $rq + r + q = 0$, $(r + 1)(q + 1) = 1$, tehát r és q vagy 0 (akkor nem prímekek), vagy $q = r = -2$, ahonnan $p = -5$.

III. $p - q - r = r$. Ekkor $r + q = q$, ahonnan $r = 0$ lenne, ami nem prím.

IV. $p - q - r = q$. Ekkor $r + q = r$, ahonnan $q = 0$ lenne, ami nem prím.

V. $p - q - r = -r$. Ekkor $r + q = -q$, $r = -2q$, ez nem lehetséges, ha r is és q is prímekek.

VI. $p - q - r = -q$. Ekkor $r + q = -r$, $q = -2r$, ez sem lehetséges, ha r is és q is prímekek.

VII. $p - q - r = rq$. Ekkor $r + q = 1$, ami csak akkor lehetséges az r és q prímszámokra, ha $r = -2$, $q = 3$ vagy $r = 3$, $q = -2$. Mindkét esetben $p - 1 = -6$, azaz $p = -5$.

VIII. $p - q - r = -rq$. Ekkor $r + q = -1$, ez csak akkor lehetséges az r és q prímekekre, ha $r = -3$, $q = 2$ vagy $r = 2$, $q = -3$. Mindkét esetben $p + 1 = 6$, azaz $p = 5$.

Látható, hogy minden esetet megvizsgáltunk, sem $p - q - r$, sem $r + q$ nem vehetnek fel más értékeket, tehát a feladat-

p	q	r
5	2	2
-5	-2	-2
-5	3	-2
-5	-2	3
5	2	-3
5	-3	2

nak az alábbi 6 megoldása van:

Spanczer Ilona (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzés. Hasonlóan, esetszétválasztással oldható meg a feladat úgy is, ha azt vizsgáljuk, hogy $\frac{rq}{r + q}$ mikor lehet egész, erre példa *Nagy Gergely* (Veszprém, Lovassy L. Gimn., 10. o.t.) megoldása.