

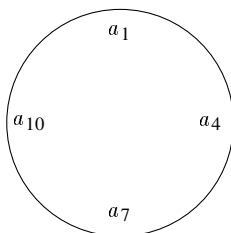
Legyen a tizenkét szám ebben a sorrendben $a_1, a_2, \dots, a_{12}$, az egymás melletti számhármaskok összege pedig $S_1 = a_{12} + a_1 + a_2, S_2 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_{12} = a_{11} + a_{12} + a_1$. Ezek összege, $S_1 + S_2 + \dots + S_{12} = 3(a_1 + a_2 + \dots + a_{12}) = 234$. Az S_i összegek átlaga így 19,5, van tehát köztük legalább ekkora. Másfelől ezek az összegek egész számok, azért valóban van köztük olyan, amelyiknek legalább 20 az értéke.

Azt állítjuk, hogy a feladat második kérdésére is igenlő a válasz, az S_i összegek között van 20-nál nagyobb is.

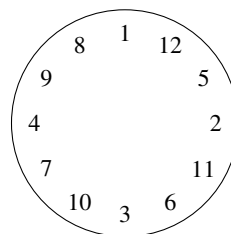
Tegyük fel, hogy ez nem igaz, a 12 szám elrendezhető úgy, hogy ne legyen 20-nál nagyobb S_i összeg. Ha hatnál kevesebb 20 értékű S_i összeg volna, akkor a tizenkét összeg összege legfeljebb $5 \cdot 20 + 7 \cdot 19 = 233$ lenne, ami lehetetlen. A 20 értékű összegek száma így legalább 6. Ha 7 vagy ennél is több ilyen összeg van, akkor van köztük két *szomszédos*, azaz $S_i = a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = S_{i+1} = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 20$. Szomszédos összegek értéke viszont egyáltalán nem lehet egyenlő, hiszen ebből $a_{i-1} = a_{i+2}$ következne.

Ha pontosan 6 maximális összeg van, akkor ahhoz, hogy 234 legyen a 12 számhármaskok összegének az összege, a további 6 számhármaskok mindegyikének összege 19 kell legyen.

A szomszédos összegek között nincsenek egyenlők, így a 12 számhármaskban felváltva követik egymást a 19 és a 20 értékű összegek. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges, feltétlenül van két szomszédos összeg, amelyek eltérése nagyobb, mint 1.



1. ábra



2. ábra

Tekintsük ehhez az a_1, a_4, a_7, a_{10} számokat (1. ábra). E négy szám különböző, így van köztük az adott körüljárás szerint szomszédos kettő, amelyek eltérése legalább 2. Például $|a_4 - a_7| \geq 2$. Ez az eltérés viszont nem más, mint $|S_5 - S_6| = |a_4 + a_5 + a_6 - (a_5 + a_6 + a_7)|$. E két szomszédos összeg eltérése így legalább 2, ami ellentmond a korábbiakban talált egyedül lehetséges elrendezésnek. Nem lehetséges tehát, hogy az S_i összegek maximuma 20 legyen, van olyan összeg, amelyik legalább 21. A 2. ábrán látható elrendezésben az S_i összegek maximuma éppen 21, eredményünk ezért tovább nem javítható.

Tran Thanh Long (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján