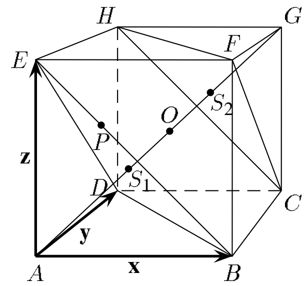
I. megoldás. Forgassuk el a kockát az AG testátlója körül $120°$-kal. Tudjuk, hogy ekkor önmagába megy át, hasonlóképpen a HFC és EDB egyenlő oldalú háromszögek is önmagukba mennek át.



1. ábra

Az EDB sík tehát párhuzamos a HFC síkkal, ezért a P pontnak a HFC síktól való távolsága helyett elegendő a két párhuzamos sík távolságát meghatároznunk. A HFC és EDB egyenlő oldalú háromszögek középpontja egybeesik a súlypontjukkal, és illeszkedik az AG testátlóra, amelyik mindkét síkra merőleges. Számítsuk ki e két súlypont távolságát. Legyenek A-ból a B, D, illetve E pontba mutató vektorok $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$, a súlypontok S_1 és S_2 (*1. ábra*).

Ekkor az ismert összefüggés szerint

$$\overrightarrow{AG} = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}, \qquad \overrightarrow{AS_1} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}}{3},$$

$$\overrightarrow{AS_2} = \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}}{3} = \frac{(\mathbf{x}+\mathbf{y})+(\mathbf{x}+\mathbf{z})+(\mathbf{y}+\mathbf{z})}{3} = \frac{2(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})}{3}.$$

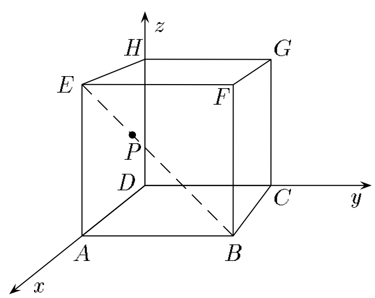
Így

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}.$$

Ebből következik, hogy a súlypontok távolsága a testátló hosszának $\frac{1}{3}$-a, azaz $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Somlai Henrietta (Pápa, Református Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Helyezzük el a kockát egy térbeli koordináta-rendszerben úgy, hogy D csúcsa az origóba essék, $ABCD$ lapjával az x, y síkon álljon az első térnegyed pozitív felén (*2. ábra*).



2. ábra

Írjuk fel a H, F, C és P pontok koordinátáit

$$H(0;0;1), \quad F(1;1;1), \quad C(0;1;0), \quad P\left(1;\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right).$$

Ezek után írjuk fel a H, F, C pontokra illeszkedő sík egyenletét. Ennek általános alakja

$$ax+by+cz+d=0.$$

Behelyettesítve a H, F és C pontok koordinátáit:

$$c+d=0, H: a+b+c+d=0, F: b+d=0, C:$$

Az egyenletrendszerből $a=d$, $b=-d$, $c=-d$, tehát ha $d\neq 0$, akkor a H, F, C pontokon átmenő sík egyenlete:

$$dx-dy-dz+d=0$$

$d\neq 0$-val osztva pedig

$$x-y-z+1=0.$$

Az ismert összefüggés szerint a $P(x_1;y_1;z_1)$ pont távolsága az $ax+by+cz+d=0$ egyenletű síktól

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Behelyettesítve, a távolság $\dfrac{\left|1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ahogyan azt az első megoldásban is láttuk.

László L. András (Veszprém, Ipari Szki. és Gimn., 10. o.t.)