

Jelöljük az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátáit $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ -vel.

Tudjuk, hogy a háromszög súlypontjának $(s_1; s_2)$ koordinátái kifejezhetők a csúcsok koordinátaival:

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}.$$

Az $a_1 + b_1 + c_1$, illetve $a_2 + b_2 + c_2$ összeg lehetséges értékei: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, de ± 3 esetén nem jön létre valódi háromszög, így csak a többi esetet kell vizsgálnunk.

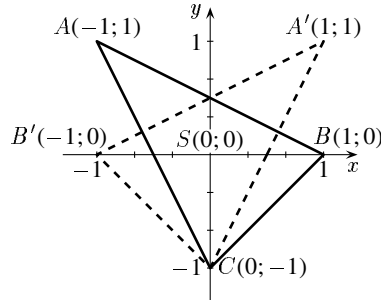
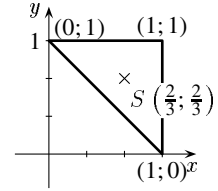
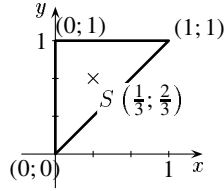
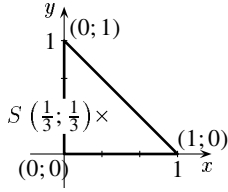
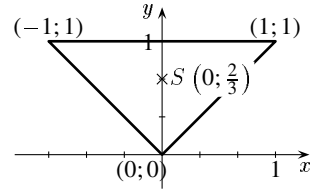
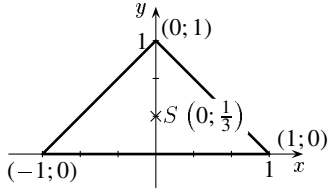
A súlypontnak az origótól való távolsága $d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$, ahol $3s_1$ és $3s_2$ értékei a $0, \pm 1, \pm 2$ közül valók.

Ezek a következő koordinátapárokat adják:

$$S: (0; 0), \quad \left(0; \pm \frac{1}{3}\right), \quad \left(0; \pm \frac{2}{3}\right), \quad \left(\pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{3}\right), \quad \left(\pm \frac{1}{3}; \pm \frac{2}{3}\right), \quad \left(\pm \frac{2}{3}; \pm \frac{2}{3}\right),$$

$$S: (0; 0), \quad \left(0; \pm \frac{1}{3}\right), \quad \left(0; \pm \frac{2}{3}\right), \quad \left(\pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{3}\right), \quad \left(\pm \frac{1}{3}; \pm \frac{2}{3}\right), \quad \left(\pm \frac{2}{3}; \pm \frac{2}{3}\right),$$

az origótól való távolságuk pedig rendre: $0, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}.$



Könnyen láthatjuk, hogy mindegyik értékhez tartozik háromszög (nem is egy). Az ábrákon azok a háromszögek láthatók, ahol a súlypont egyik koordinátája sem negatív.

Ha tükrözzük ezeket a háromszögeket valamelyik koordinátatengelyre, azaz a csúcsok egyik koordinátájának előjelét megváltoztatjuk, az így kapott háromszög súlypontjának távolsága az origótól nem változik meg. Tehát a távolságokra valóban csak a felsorolt 6 érték adódhat.