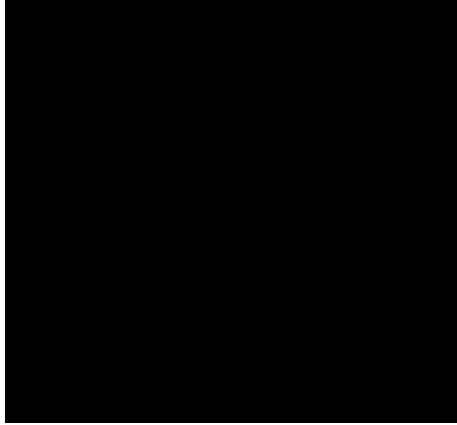


Legyen a feladatban szereplő rácssokszög az $A_1A_2 \dots A_k$ sokszög, az A_i pont koordinátái legyenek $(x_i; y_i)$, legyen továbbá $a_i = x_{i+1} - x_i$ és $b_i = y_{i+1} - y_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$, az indexeket moduló k számolva). Jelöljük a rácssokszög oldalainak hosszát $\sqrt{h}$ -val.



Mivel a sokszög minden oldalának hossza $\sqrt{h}$, azért minden i -re

$$a_i^2 + b_i^2 = h.$$

Egy négyzetszám 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat, ezért h a 4-gyel osztva 0, 1 vagy 2 maradékot ad. Vizsgáljuk meg külön-külön ezt a három esetet.

Ha $h \equiv 0 \pmod{4}$, akkor a_i is és b_i is páros minden i -re. Ekkor a sokszöget a felére kicsinyíthetjük úgy, hogy a kicsinyített sokszög is egyenlő oldalú rácssokszög legyen. Mindaddig folytassuk a kicsinyítést, amíg az újonnan keletkezett sokszög a_i és b_i típusú számai közt legalább egy páratlan nem lesz. Ezt véges sok lépés után biztosan elérjük. A kicsinyítések során a sokszög oldalszáma nem változik, így ezt az esetet visszavezettük a maradék két eset egyikére.

Ha $h \equiv 1 \pmod{4}$, akkor minden i -re a_i és b_i egyike páros, a másik pedig páratlan, azaz $a_i + b_i \equiv 1 \pmod{2}$. Az így kapott k darab kongruenciát összeadva:

$$\sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^k b_i \equiv k \pmod{2}.$$

De az a_i -k és b_i -k definíciója miatt $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k b_i = 0$, hiszen a sokszög zárt, tehát $k \equiv 0 \pmod{2}$. Ez viszont éppen a bizonyítandó állítás.

Ha $h \equiv 2 \pmod{4}$, akkor a_i is és b_i is páratlan minden i -re. Vagyis $a_i \equiv 1 \pmod{2}$ minden i -re, tehát

$$0 = \sum_{i=1}^k a_i \equiv k \pmod{2}.$$

A sokszög oldalszáma tehát ebben az esetben is páros.

Több eset nincs, ezért a feladat állítását igazoltuk.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 12. o.t.) dolgozata alapján