

I. megoldás. Az állítást k szerinti indukcióval bizonyítjuk. A $k = 1$ eset így szól: ha p prím és $p \mid n!$, akkor $p! \mid n!$; ez igaz, hiszen p prím lévén, $n \geq p$. Tegyük fel, hogy az állítás $k = \ell$ -re igaz, és tételezzük fel, hogy $p^{\ell+1} \mid n!$. Jelölje m a legkisebb olyan pozitív egészet, amelyre $p^\ell \mid m!$; ekkor $m + p$ a legkisebb olyan pozitív egész, amelynek faktoriálisa $p^{\ell+1}$ -nel osztható, így $n \geq m + p$. Azonban $(m + p)! = m! \cdot \binom{m+p}{p} p!$; itt $m!$ osztható p^ℓ -nel, ezért az indukciós feltevés szerint $(p!)^\ell$ -nel is osztható, tehát $m! p!$ osztható $(p!)^{\ell+1}$ -nel. Mivel $\binom{m+p}{p}$ egész, azért ebből $(p!)^{\ell+1} \mid (m + p)! \mid n!$, így az állítás $k = (\ell + 1)$ -re is igaz.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Felhasználjuk, hogy ha q prím, akkor $n!$ a q -nak pontosan az $\left(\left[\frac{n}{q}\right] + \left[\frac{n}{q^2}\right] + \dots\right)$ -adik hatványával osztható (vagyis q -nak az 1-gyel magasabb hatványa már nem osztója $n!$ -nak). Tegyük fel ezután, hogy $p^k \mid n!$; k értékét esetleg növelve feltehető, hogy p^{k+1} már nem osztója $n!$ -nak, azaz

$$(1) \quad k = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots$$

A $(p!)^k$ minden p -től különböző prímosztója p -nél kisebb, és egy ilyen q prímnek pontosan a $k \left(\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{p}{q^2}\right] + \dots\right)$ -adik hatványa osztója $(p!)^k$ -nak. Mivel $(p!)^k$ a p -nek pontosan a k -adik hatványával osztható, azért elegendő belátni, hogy

$$(2) \quad k \left(\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{p}{q^2}\right] + \dots\right) \leq \left[\frac{n}{q}\right] + \left[\frac{n}{q^2}\right] + \dots,$$

azaz hogy $n!$ a q -nak legalább akkora hatványával osztható, mint $(p!)^k$. A (2) egyenlőtlenséget tagonként igazoljuk, megmutatva, hogy minden $a \geq 1$ egészre és $q < p$ prímre $\left[\frac{n}{q^a}\right] \geq k \cdot \left[\frac{p}{q^a}\right]$. Az (1) szerint

$$k \left[\frac{p}{q^a}\right] = \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots\right) \left[\frac{p}{q^a}\right] \leq \left[\frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \dots\right] \left[\frac{p}{q^a}\right] = \left[\frac{n}{p-1}\right] \cdot \left[\frac{p}{q^a}\right].$$

Mivel q^a és p relatív prímek, azért $\left[\frac{p}{q^a}\right] = \left[\frac{p-1}{q^a}\right]$, így

$$\left[\frac{n}{p-1}\right] \left[\frac{p}{q^a}\right] = \left[\frac{n}{p-1}\right] \cdot \left[\frac{p-1}{q^a}\right] \leq \left[\frac{n}{p-1} \cdot \frac{p-1}{q^a}\right] = \left[\frac{n}{q^a}\right],$$

amit bizonyítani kellett.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)