

I. megoldás. Jelöljük egy n elemű halmaz partícióinak a számát $r(n)$ -nel. Nyilván $r(1) = 1 = 1!$, $r(2) = 2 = 2!$, $r(3) = 4 < 3!$. Tegyük fel, hogy $r(k) < k!$, és vizsgáljuk egy $k + 1$ elemű $T = H \cup \{a\}$ halmaz partícióit ($a \notin H$). A T minden partíciójából az a elem elhagyásával a H partícióját kapjuk. Megfordítva ez azt jelenti, hogy T minden partíciója megkapható a H alkalmas $H = K_1 \cup \dots \cup K_t$ partíciójából úgy, hogy az a elemet valamelyik K_i részhalmazhoz csatoljuk, vagy képezzük a (mindegyik K_i -hez diszjunkt) $\{a\}$ halmazt.

Adott H -beli partíció esetén ez éppen $t+1$ lehetőség. Mivel a K_i halmazok egyike sem üres¹, azért $t \leq k$, $t+1 \leq k+1$. Tehát $r(k+1) \leq (k+1)r(k)$, így (a megvizsgált kezdeti érték(ek)re támaszkodva) az $r(n) \leq n!$ egyenlőtlenség teljes indukciós bizonyítását kaptuk.

Vitéz Ildikó (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz mindegyik partíciójához rendeljük hozzá az $1, 2, \dots, n$ számok egy sorbaállítását a következőképpen: először állítsuk a partíciót meghatározó részhalmazokat legkisebb elemük szerint növekvő sorrendbe, az egyes részhalmazokban szereplő számokat pedig rendezzük csökkenő sorrendbe. Egy ilyen módon kapott számsorból a partíció egyértelműen visszakapható, hiszen éppen ott vannak az egyes részhalmazokat kijelölő vágások, ahol a sorban egy szám után nála nagyobb szám következik. Tehát különböző partícióknak különböző számsorozatok felelnek meg, ezért a partíciók száma nem nagyobb az összes sorrend számánál, $n!$ -nál.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)

¹ Ez a nyilvánvalóan szükséges megszorítás a feladat szövegéből sajnos kimaradt.