

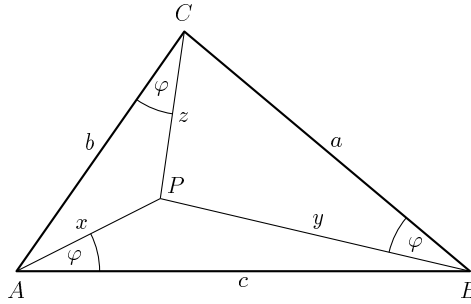
Jelöljük az ABC háromszög területét T -vel, oldalait a , b , c -vel, és legyen $AP = x$, $BP = y$, valamint $CP = z$. Mivel P az ABC háromszög belső pontja, a PAB , PBC és a PCA háromszögek területének összege megegyezik az ABC háromszög területével, azaz

$$T = \frac{xc \sin \varphi}{2} + \frac{ya \sin \varphi}{2} + \frac{zb \sin \varphi}{2}.$$

Ez az egyenlőség a $2T = bc \sin \alpha = ca \sin \beta = ab \sin \gamma$ egyenlőségeket felhasználva

$$(1) \quad \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{xc}{bc \sin \alpha} + \frac{ya}{ca \sin \beta} + \frac{zb}{ab \sin \gamma}$$

formában is írható.



Mivel $\angle CAP = \angle CAB - \angle PAB = \alpha - \varphi$, azért $\angle APC = 180^\circ - \alpha$. Tehát az APC háromszögben a szinusztétel szerint $x : b = \sin \varphi : \sin(180^\circ - \alpha)$, vagyis $\frac{x}{b} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}$. Ugyanígy kapjuk az APB és a BPC háromszögekből, hogy $\frac{y}{c} = \frac{\sin \varphi}{\sin \beta}$ és $\frac{z}{a} = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma}$. Ezeket az (1) egyenlőségbe beírva, ott elvégezve a lehetséges egyszerűsítéseket, majd pedig $\sin \varphi$ -vel osztva éppen a bizonyítandó

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}.$$

összefüggést kapjuk.

Megjegyzés. A P pont az ABC háromszög (egyik) *Brocard*-féle pontja.

Baharev Ali (Vác, Boronkay Gy. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján