

Legyen $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$. Az egyenlőtlenség bal oldala:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a-x_1} + \frac{x_2}{a-x_2} + \dots + \frac{x_n}{a-x_n} &= \left(\frac{a}{a-x_1} - 1 \right) + \left(\frac{a}{a-x_2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{a}{a-x_n} - 1 \right) = \\ &= \frac{a}{a-x_1} + \dots + \frac{a}{a-x_n} - n. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget az $\frac{a}{a-x_i}$ (pozitív) számokra:

$$\frac{a}{a-x_1} + \dots + \frac{a}{a-x_n} - n \geq n \cdot \frac{n}{\frac{a-x_1}{a} + \dots + \frac{a-x_n}{a}} - n = \frac{n^2 a}{na-a} - n = \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll, ha az $\frac{a}{a-x_i}$ számok mind egyenlőek, azaz $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Sipos Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)