

Az $y = x^3$ görbe pontjait egyértelműen jellemezhetjük az abszcisszájukkal. Legyen $\circ$ az a művelet, amely a görbe a és b abszcisszájú A és B pontjai esetén $a \circ b$ -nek az $A * B$ pont abszcisszáját felelteti meg. Ekkor a pontokon értelmezett $*$ művelet pontosan akkor asszociatív, ha a valós számokon értelmezett $\circ$ művelet az. Megmutatjuk, hogy $\circ$ éppen az összeadás, amiből feladatunk állítása nyilván következik.

Az AB egyenes egyenlete $a \neq b$ esetén

$$(b - a)(y - a^3) = (b^3 - a^3)(x - a),$$

ami rendezés után

$$(1) \quad y = (b^2 + ab + a^2)x - b^2a - a^2b$$

alakba írható. Könnyen ellenőrizhető, hogy az (1) egyenlet $b = a$ esetén az $y = x^3$ görbe (a, a^3) pontbeli érintőjének az egyenlete. Az (1) egyenletű egyenes és az $y = x^3$ metszéspontjainak abszcisszái kielégítik az

$$x^3 = (b^2 + ab + a^2)x - b^2a - a^2b$$

egyenletet. Ebben az x -re nézve harmadfokú egyenletben x^2 együtthatója 0, ezért a három gyök összege is 0. Mivel az egyenlet két gyöke a és b , a harmadik gyöke $-(a + b)$. Vagyis a harmadik metszéspont a $(-(a + b), -(a + b)^3)$ pont, tehát az $A * B$ pont az $((a + b), (a + b)^3)$ pont, ami azt jelenti, hogy $a \circ b = a + b$. (Könnyen ellenőrizhető, hogy ez az $a = b$ esetben is érvényes.)

Megjegyzés. Megoldásunkból az is látszik, hogy az $y = x^3 + kx$ egyenletű görbére is igaz a feladat állítása.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 12. o.t.) *Terpai Tamás* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

dolgozatai alapján