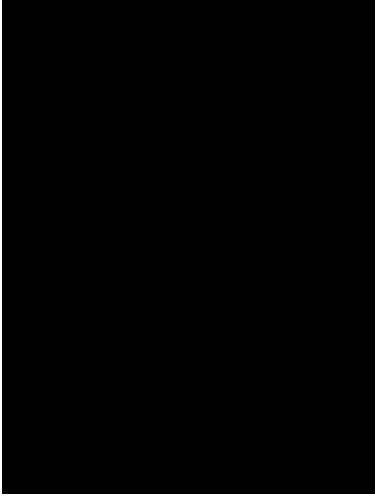


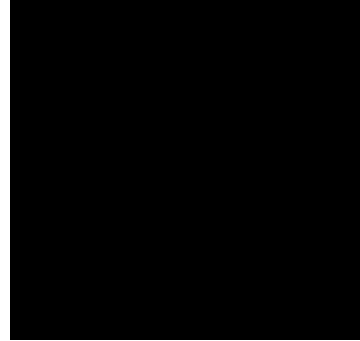
A megoldás során szükségünk lesz $\cos 72^\circ$ és $\cos 144^\circ$ pontos értékére. Ezeket az 1. ábrán látható 36° -os szárszögű egyenlő szárú háromszög segítségével számoljuk ki. Használjuk az ábra jelöléseit. Az ABC és a CDB háromszögek hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlők, ezért $(1+x):x = x:1$, amiből kapjuk, hogy $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, s így $AB = AC = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Ezért

$$\cos 72^\circ = \frac{\frac{BC}{2}}{AC} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

amiből következik, hogy $\cos 144^\circ = 2\cos^2 72^\circ - 1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.



1. ábra



2. ábra

Térjünk rá az eredeti feladatra. Feltehetjük, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_5$ vektorok a 2. ábrán látható módon helyezkednek el, és mindegyikük hossza 1. Szorozzuk meg a $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$ egyenletet skalárisan a $\mathbf{v}_1$ vektorral. Ekkor kapjuk, hogy

$$k_1\mathbf{v}_1^2 + k_2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + k_3\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 + k_4\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{v}_1 + k_5\mathbf{v}_5 \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

De

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_5 \cdot \mathbf{v}_1 = \cos 72^\circ \text{ és } \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{v}_1 = \cos 144^\circ,$$

tehát

$$k_1 + (k_2 + k_5) \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} + (k_3 + k_4) \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = 0,$$

amit rendezve

$$4k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5 = \sqrt{5} \cdot (k_3 + k_4 - k_2 - k_5)$$

adódik. Mivel a k_i -k egészek, $\sqrt{5}$ pedig irracionális, ez csak akkor teljesülhet, ha

$$4k_1 = k_2 + k_3 + k_4 + k_5 \quad \text{és} \quad k_2 + k_5 = k_3 + k_4.$$

Ezt a gondolatmenetet $\mathbf{v}_1$ helyett a $\mathbf{v}_i$ ($i = 2, 3, 4, 5$) vektorral megismételve azt kapjuk, hogy minden i esetén igaz az $5k_i = k_1 + k_2 + \dots + k_5$ összefüggés, amiből nyilván következik, hogy $k_1 = k_2 = \dots = k_5$.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat állítása általánosítható 5-ről tetszőleges p -re, ahol p a 2-nél nagyobb prímszám. Ennek végsősoron az az oka, hogy minden ilyen p -re az $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ polinom irreducibilis, azaz nem bontható fel két olyan racionális együtthatós polinomnak a szorzatára, amelyeknek a foka legalább 1.