

Az utolsó mondat feltétele azt jelenti, hogy a 10 gyerek egyetlen „kört” alkotott, mielőtt ketten elengedték egymás kezét. A bonyolult megfogalmazás annak köszönhető, hogy ezen a körön csomó, önátmetszés is lehetséges. Nevezzük mindenesetre „körnek” a feltételnek eleget tevő, esetleg csomót is tartalmazó elrendezést. Azt állítjuk, hogy n gyerek $(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \cdot 2$ -féleképpen alkothat „kört”.

Állításunk bizonyításához tekintsük az egyik gyereket, pl. Pistit kiindulásnak. Ő a jobbkezevel $(2n-2)$ kezét foghat meg (mivel a feltételből következik, hogy senki sem fogja meg a saját kezét). Amelyik gyereknek megfogta valamelyik kezét, az a másik kezével már csak $(2n-4)$ kezét foghat meg, (Pisti balkezét megfogva bezárná a kört). Így haladva az utolsó előtti gyerek még választhat valakinek a két keze közül, aki viszont a másik kezével megfogja Pisti balkezét. Ez $(2n-2)(2n-4) \cdots 2$ lehetőség, amit röviden $(2n-2)!!$ -sal jelölünk, és $2n-2$ szemifaktoriálisnak mondunk.

$n = 10$ esetén ez $18!!$. Ha a tíz gyerek nem alkot egy „kört”, akkor kisebb „körökbe” rendeződnek (amelyek egymáshoz viszonyított helyzete minket nem érdekel). A körök mérete 2-től 8-ig változhat. Adott méretekhez tartozó elrendezések számát úgy kapjuk meg, hogy a gyerekeket az adott méretű csoportokba osztjuk, majd az egyes csoportokon belül egymástól függetlenül elkészítjük a lehetséges köröket.

Ha például két darab 3-as és egy darab 4-es kör jön létre, akkor először

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = \binom{10}{3} \binom{7}{3} \text{-féleképpen}$$

beosztjuk a gyerekeket, majd az egyes csoportokon belül $(6-2)!!$, $(6-2)!!$, illetve $(8-2)!!$ -féleképpen elkészítjük a köröket. A beosztás során azonban megkülönböztetjük a két 3-as csoportot – és általában az azonos méretűeket – így itt minden lehetőséget 2-szer számolunk. Hasonlóan, a $(2, 2, 2, 4)$ -es csoportbeosztásokat például $3! = 6$ -szor, a $(2, 2, 3, 3)$ -asokat pedig $2! \cdot 2!$ -szor számoljuk. Mindezeket figyelembe véve az alábbi lehetőségek adódnak. A lista elején az adott felosztásban szereplő csoportok méretét soroltuk fel, ez a 10 összes lehetséges előállítás 2 és 8 közé eső számok összegeként.

10; (20–

$$2)!! = 185\,794\,5602, 8; \binom{10}{2} \cdot (4-2)!! \cdot (16-2)!! = 58\,060\,8003, 7; \binom{10}{3} \cdot (6-2)!! \cdot (14-2)!! = 44\,236\,8005,$$

$$5; \binom{10}{5} \cdot (10-2)!! \cdot (10-2)!!/2 = 18\,579\,456, \quad \text{mert minden esetet kétszer számoltunk. } 2, 2,$$

$$6; \binom{10}{6} \binom{4}{2} \cdot (4-2)!! \cdot (4-2)!! \cdot (12-2)!!/2 = 9\,676\,8002, 3, 5; \binom{10}{5} \binom{5}{3} \cdot (4-2)!! \cdot (6-2)!! \cdot (10-2)!! = 15\,482\,8802,$$

$$4, 4; \binom{10}{2} \binom{8}{4} \cdot (4-2)!! \cdot (8-2)!! \cdot (8-2)!!/2 = 7\,257\,6003, 3, 4; \binom{10}{4} \binom{6}{3} \cdot (6-2)!! \cdot (6-2)!! \cdot (8-2)!!/2 = 6\,451\,2002,$$

$$2, 2, 4; \binom{10}{4} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \cdot (4-2)!! \cdot (4-2)!! \cdot (4-2)!! \cdot (8-2)!!/3! = 1\,209\,6002, 2, 3, 3; \binom{10}{3} \binom{7}{3} \binom{4}{2} \cdot (4-2)!! \cdot (4-$$

$$2)!! \cdot (6-2)!! \cdot (6-2)!!/(2 \cdot 2) = 1\,612\,8002, 2, 2, 2, 2; \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \cdot ((4-2)!!)^5/5! = 30\,240.$$

Ezek összege adja az összes lehetséges esetek számát, ami $387\,099\,936$. A keresett hányados $\frac{185\,794\,560}{387\,099\,936} \approx 0,48$, tehát az eseteknek valamivel kevesebb, mint a felében alkot a tíz gyerek egyetlen „kört”.

Megjegyzés. Ha N gyereket akarunk elrendezni m_1 darab c_1 , m_2 darab c_2 , $\dots$, m_k darab c_k méretű körbe ($m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_k c_k = N$), akkor ez

$$\frac{N!}{c_1^{m_1} \cdot c_2^{m_2} \cdot \dots \cdot c_k^{m_k}} \cdot \frac{1}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!} \cdot (c_1!!)^{m_1} \cdot (c_2!!)^{m_2} \cdot \dots \cdot (c_k!!)^{m_k}$$

módon lehetséges.