

Megoldás. Az állításnak csak $n \geq 100$ esetén van értelme (ennél kisebb érték esetén $n - 10\sqrt{n}$ negatív), ezért feltehetjük, hogy $n \geq 100$ és $\sqrt{n} \geq 10$.

Az áttekinthetőség kedvéért a megoldást több segédtelet kimondására és bizonyítására bontjuk szét.

I. segédtelet. Ha az $f(x)$ polinom foka kisebb mint n , akkor

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x+k) = 0.$$

Bizonyítás. A segédtelet f foka szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha f foka 0, azaz f konstans, értéke c , akkor tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x+k) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \right) c = (1-1)^n c = 0.$$

Tegyük fel, hogy (1) igaz m -nél kisebb fokú polinomokra. Ebből bebizonyítjuk pontosan m -edfokú polinomokra is. Legyen f egy pontosan m -edfokú polinom. Írjuk fel az indukciós feltevést a $g(x) = f(x) - f(x+1)$ polinomra, n helyére $(n-1)$ -et írva. Ezt megtehetjük, mert az $f(x) - f(x+1)$ felírásában az m -edfokú tag kiesik, ezért g legfeljebb $(n-1)$ -edfokú.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} g(x+k) = 0.$$

Beírva g definícióját,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} g(x+k) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (f(x+k) - f(x+k+1)) = \\ &= \binom{n-1}{0} f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) f(x+k) - (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} f(x+n) = \\ &= \binom{n}{0} f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+k) + (-1)^n \binom{n}{n} f(x+n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x+k). \end{aligned}$$

Ezzel a segédtelet igazoltuk m -edfokú polinomokra is.

II. segédtelet. Ha a p és q polinomok fokszámának összege kisebb, mint n , akkor

$$(2) \quad |p(0)| \leq \frac{\max(|q(1)|, \dots, |q(n)|)}{|q(0)|} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |p(k)|.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az I. segédtelet az $f = pq$ polinomra és $x = 0$ -ra:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p(k)q(k) = 0.$$

Az első tagot felülről becsülve a többivel,

$$(3) \quad \left| \binom{n}{0} p(0)q(0) \right| = \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} p(k)q(k) \right| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |p(k)q(k)|,$$

amiből

$$|p(0)| \leq \frac{1}{|q(0)|} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |p(k)q(k)| \leq \frac{\max(|q(1)|, \dots, |q(n)|)}{|q(0)|} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |p(k)|.$$

III. segédtelet. Létezik olyan q polinom, amelyre a következők egyszerre teljesülnek:

1. A q foka kisebb, mint $10\sqrt{n}$;
2. A $|q(1)|, |q(2)|, \dots, |q(n)|$ számok mindegyike legfeljebb 1;
3. $q(0) > 10$.

Bizonyítás. Legyen $m = \lceil 10\sqrt{n} \rceil - 1$, és legyen T_m az m -edik Csebisev-polinom. Ennek a polinomnak nagyon sok nevezetes tulajdonsága van, ezek közül a következőkre lesz szükségünk:

- a) T_m foka pontosan m ;
- b) Tetszőleges u valós számra $T_m(\cos u) = \cos mu$ és $T_m(\operatorname{ch} u) = \operatorname{ch} mu$;

c) Ha $|x| \leq 1$, akkor $|T_m(x)| \leq 1$.

Válasszuk a q polinomot a következőképpen:

$$q(x) = T_m \left(\frac{n+1-2x}{n-1} \right).$$

Mivel ez a polinom is pontosan m -edfokú, az 1. tulajdonság teljesül.

Az $x \mapsto \frac{n+1-2x}{n-1}$ függvény az $1, 2, \dots, n$ számokat a $[-1, 1]$ intervallumba képezi, ezért a c) tulajdonságból következik a 2. tulajdonság.

A $q(0)$ becsléséhez a 2. tulajdonságból tudjuk, hogy

$$q(0) = T_m \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = \operatorname{ch} \left(m \cdot \operatorname{ar\,ch} \frac{n+1}{n-1} \right).$$

Mivel tetszőleges $0 < u < \frac{1}{2}$ esetén

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} u &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{(2k)!} < 1 + u^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + u^2, \\ \operatorname{ch} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) &< 1 + \frac{1}{n} < \frac{n+1}{n-1}, \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{ar\,ch} \frac{n+1}{n-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Mivel $m > 10\sqrt{n} - 2 > 9\sqrt{n}$, ebből következik, hogy

$$q(0) > \operatorname{ch} \left(9\sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \operatorname{ch} 9 > 10.$$

Ezzel a 3. tulajdonság teljesülését is igazoltuk.

Ha a III. segédttétel q polinomját írjuk be a II. segédttételbe, akkor éppen a feladat állítását kapjuk.