

Egy négyzetszám csak páros számú nullára végződhet. Írjuk a B számot az A mögé, ekkor tehát B páros számú nullára végződik, hiszen $\overline{AB}$ négyzetszám. Könnyű belátni, hogy ha egy A, B pár megfelel a feladat követelményeinek, akkor $A, B \cdot 100$ is megfelel. (Hiszen $\overline{AB}$ és $2 \cdot A \cdot B$ is 100-szorosára változik.) Feltéhetjük tehát, hogy B nem osztható 10-zel. Legyen a B szám b -jegyű. Ekkor $\overline{AB}$ négyzetszám, és

$$\overline{AB} = 10^b \cdot A + B = 2 \cdot A \cdot B.$$

Átrendezve

$$(1) \quad 10^b \cdot A = (2A - 1) \cdot B$$

adódik, azaz $2^b \cdot A$ osztója a $(2A - 1) \cdot B$ szorzatnak. Azt állítjuk, hogy $2^b \cdot A$ és a szorzat első tényezője, $2A - 1$, relatív prímek. Valóban, $2^b \cdot A$ tetszőleges p prímosztója vagy $p = 2$ vagy pedig p osztója A -nak és így $2A$ -nak is. A 2 nyilván nem osztója a páratlan $(2A - 1)$ -nek, a második esetben pedig p szintén nem lehet egyidejűleg osztója a szomszédos $(2A - 1)$ -nek és $2A$ -nak.

Így viszont $2^b \cdot A$ mint a $(2A - 1) \cdot B$ szorzat osztója, a második tényezőnek, B -nek is osztója, vagyis $B = k \cdot 2^b \cdot A$ valamilyen pozitív egész k -val. (1)-ben $2^b \cdot A$ -val egyszerűsítve

$$(2) \quad 5^b = (2A - 1) \cdot k$$

adódik. (2)-ből mind $(2A - 1)$, mind pedig k az 5 hatványa. Mivel $b \geq 1$, azért k értéke csak 1 lehet, egyébként ugyanis $B = k \cdot 2^b A$ osztható volna 10-zel.

Így $5^b = 2A - 1$, azaz $A = \frac{5^b + 1}{2}$ és $B = 2^b \cdot A$. Ekkor $2 \cdot A \cdot B = 2^{b+1} A^2$ pontosan akkor négyzetszám, ha b páratlan. Eszerint $A = \frac{5^b + 1}{2}$ és $B = 2^b \cdot A = 2^{b-1}(5^b + 1)$, ahol b páratlan.

Így $2 \cdot A \cdot B = 2^{b+1} A^2$ valóban négyzetszám, fennál az $\overline{AB} = 2 \cdot A \cdot B$ egyenlőség, hiszen

$$10^b A + B = 10^b \cdot A + 2^b \cdot A = 2^b \cdot A(5^b + 1) = 2^{b+1} \cdot A^2 = 2 \cdot A \cdot B,$$

végül $10^{b-1} < B < 10^b$, azaz B jegyeinek száma valóban b .

A feladat követelményeit tehát az

$$A = \frac{5^b + 1}{2} \quad \text{és a} \quad B = 2^b \cdot A \cdot 100^m$$

alakú számok elégítik ki, ahol b páratlan, m pedig tetszőleges természetes szám.